ANÁLISIS EN EL PLANO DE LAPLACE

La transformada de Laplace es un método que transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica más fácil de resolver.

F(t): una función del tiempo t tal que f(t) = 0 para t<0
S:una variable compleja (LAPLACE)

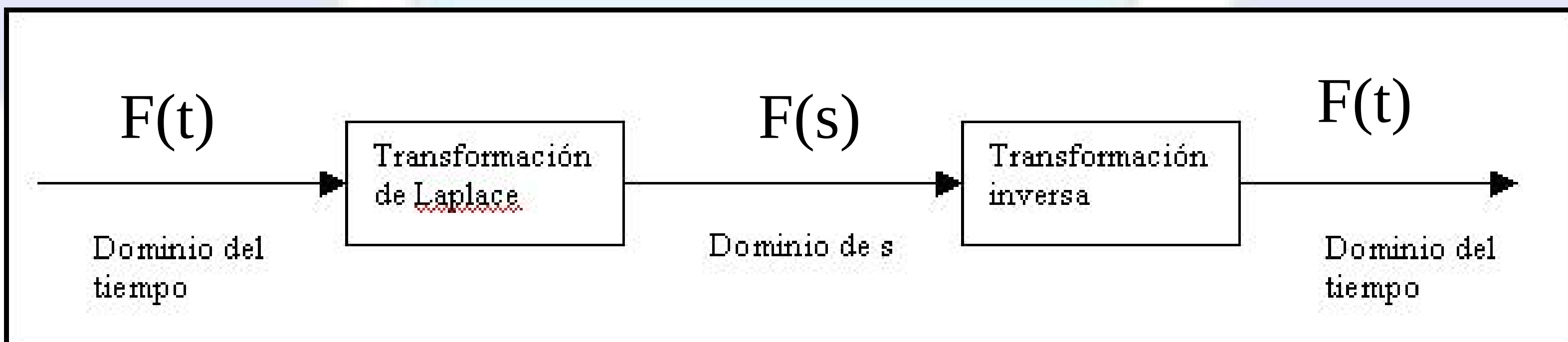
F(s): transformada de Laplace

Se define la Td L según

$$\boxed{L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt \cdot [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt}$$

El proceso inverso de encontrar la función del tiempo f(t) a partir de la transformada de Laplace F(s) se denomina transformada inversa de Laplace.

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2j \cdot \pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds \quad t > 0$$



PROPIEDADES

- Linealidad

$$\ell\left[f_1(t)+f_2(t)\right]=F_1(s)+F_2(s)$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$\ell\left[f(t-\tau)u(t-\tau)\right]=e^{-s\tau}F(s)$$

- Derivada en t

$$\ell\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$$

- Integral en t

$$\ell\left[\int_a^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int_a^t f(t)\,dt\right]_{t=0}}{s}$$

- Teorema del valor inicial

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- Teorema del valor final

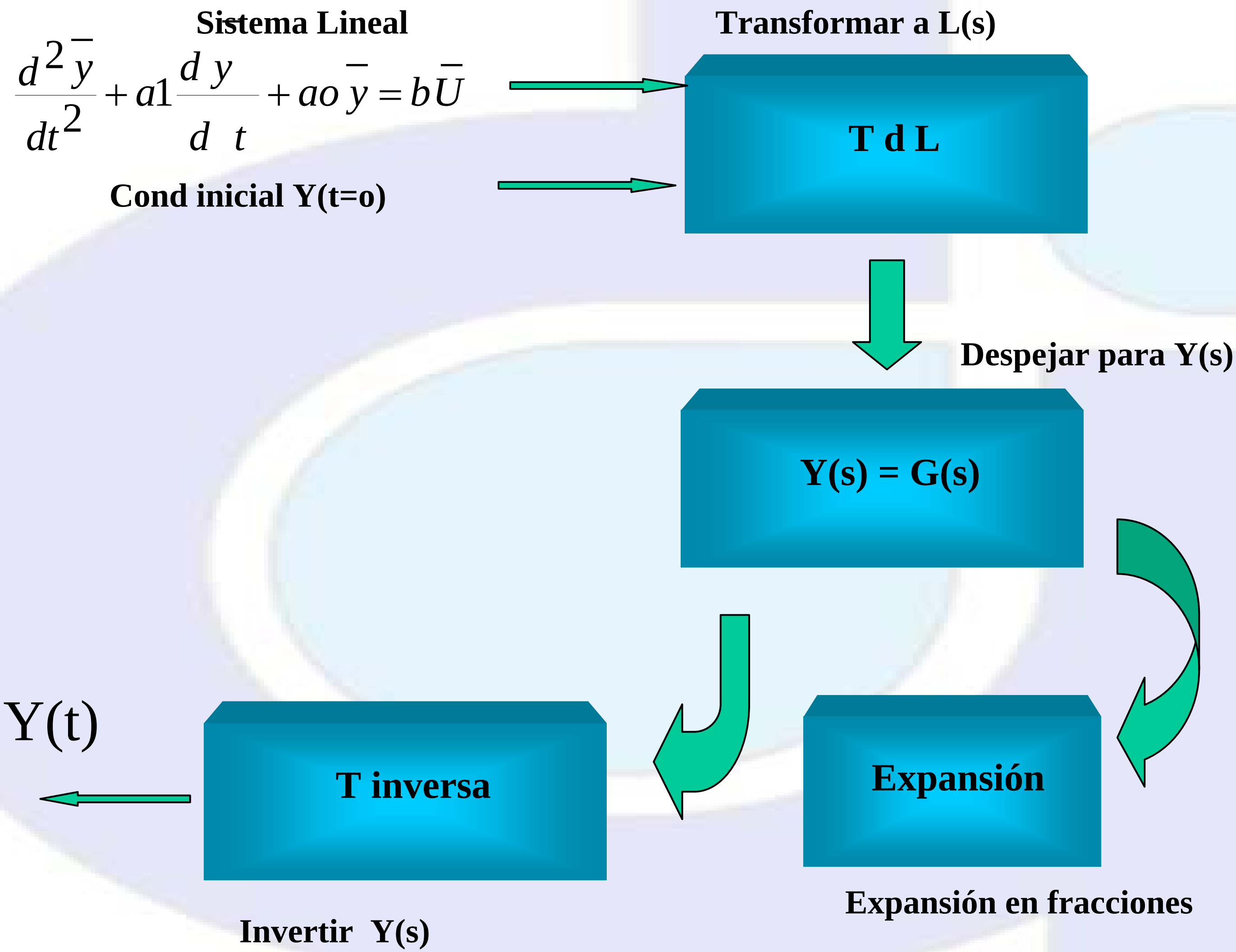
$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Algunas funciones transformadas importantes

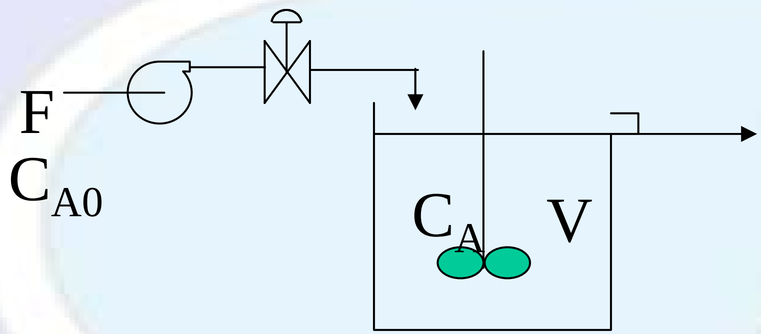
Escalón Unitario $$f(t)=1 \rightarrow F(s)=\frac{1}{s}$$

Rampa $$f(t)=t \rightarrow F(s)=\frac{1}{s^2}$$

Exponencial $$f(t)=e^{-\alpha t} \rightarrow F(s)=\frac{1}{(S+\alpha)}$$


Sistema Lineal
$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + a1\frac{d\,\bar{y}}{d\,t} + ao\,\bar{y} = b\bar{U}$$
Cond inicial Y(t=o)
Transformar a L(s)
T d L
Despejar para Y(s)
Y(s) = G(s)
Expansión
Expansión en fracciones
T inversa
Invertir Y(s)
Y(t)

¿Podemos hacer un ejemplo ?



$$A \rightarrow B$$
$$-r_A = kC_A$$

$$\tau \frac{dC_A}{dt} + C_A = KC_{A0} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{V}{F + kV} \quad \text{y} \quad K = \frac{F}{F + kV}$$

Con C_A expresada en variables de desviación : $C_A(0)=0$

Aplicando T.d.L a la ecuación diferencial tenemos

$$L\{\tau \frac{dC_A}{dt}\} + L\{C_A\} = KL\{C_{A0}\}$$

$$\tau S * C_A(s) - \underbrace{S^* C_A(0)}_{0} + C_A(s) = KC_{Ao}(s)$$

$$C_A(s)(\tau S + 1) = KC_{Ao}(s)$$

$$\frac{C_A(s)}{C_{Ao}(s)} = \frac{K}{(\tau S + 1)}$$

Si C_Ao es un escalón entre 0 y A podemos encontrar la respuesta de la concentración de salida con el tiempo

$$C_A(s) = \frac{A}{S} * \frac{K}{(\tau S + 1)}$$

$$C_A(t) = AK * (1 - e^{-t/\tau})$$

Solución en clases

LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA G(s)

Sea un sistema dinámico lineal expresado en variables de desviación según :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 u(t).$$

Si aplicamos T.d.L mediante la transformación de derivada

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n f(s) - \underbrace{\left(s^{n-1} f(t)\Big|_{t=0} + s^{n-1}\frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0} + \ldots + \frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0} \right)}_{0}$$

Se obtiene una ecuación de grado n-m en s según :

$$\frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \ldots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0} = \frac{Y(s)}{u(s)}$$

Se define a la Función de Transferencia (FT) como el cuociente entre las salidas y las entradas en el plano de Laplace y expresadas como variables de desviación

$$\frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \ldots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0} = \boxed{\frac{Y(s)}{u(s)} = G(s)}$$

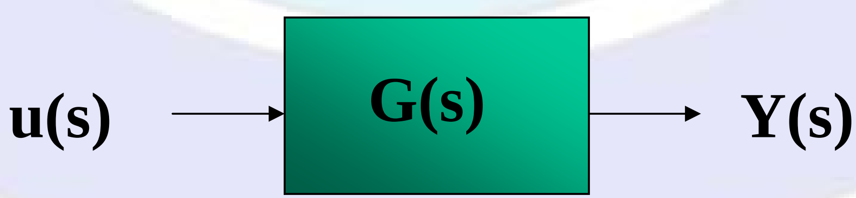
Otra forma de escribirla es :

$$\frac{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_n)} = \frac{Y(s)}{u(s)} = G(s)$$

Ci los ceros y pi los polos de la F.T

Observaciones:

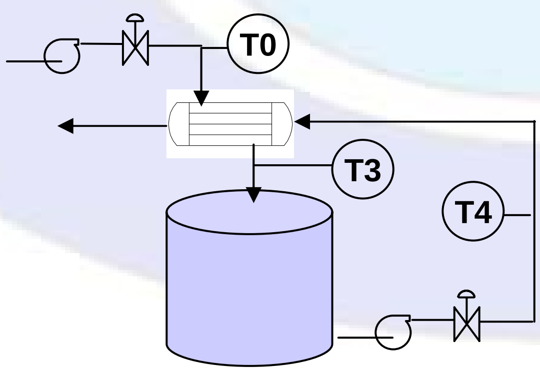
- Una F.T se aplica a un sistema lineal en V.D.
- Una F.T es físicamente realizable si n≥m
- Una F.T relaciona 1 entrada con una salida (SISO)

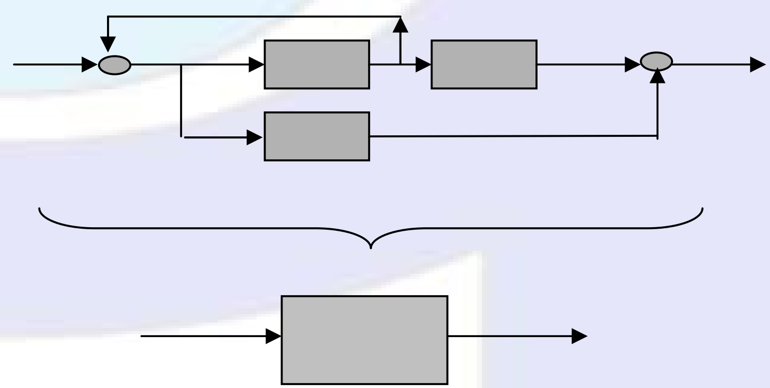


Las Funciones de transferencia son útiles para representar uno o mas procesos interconectados entre si

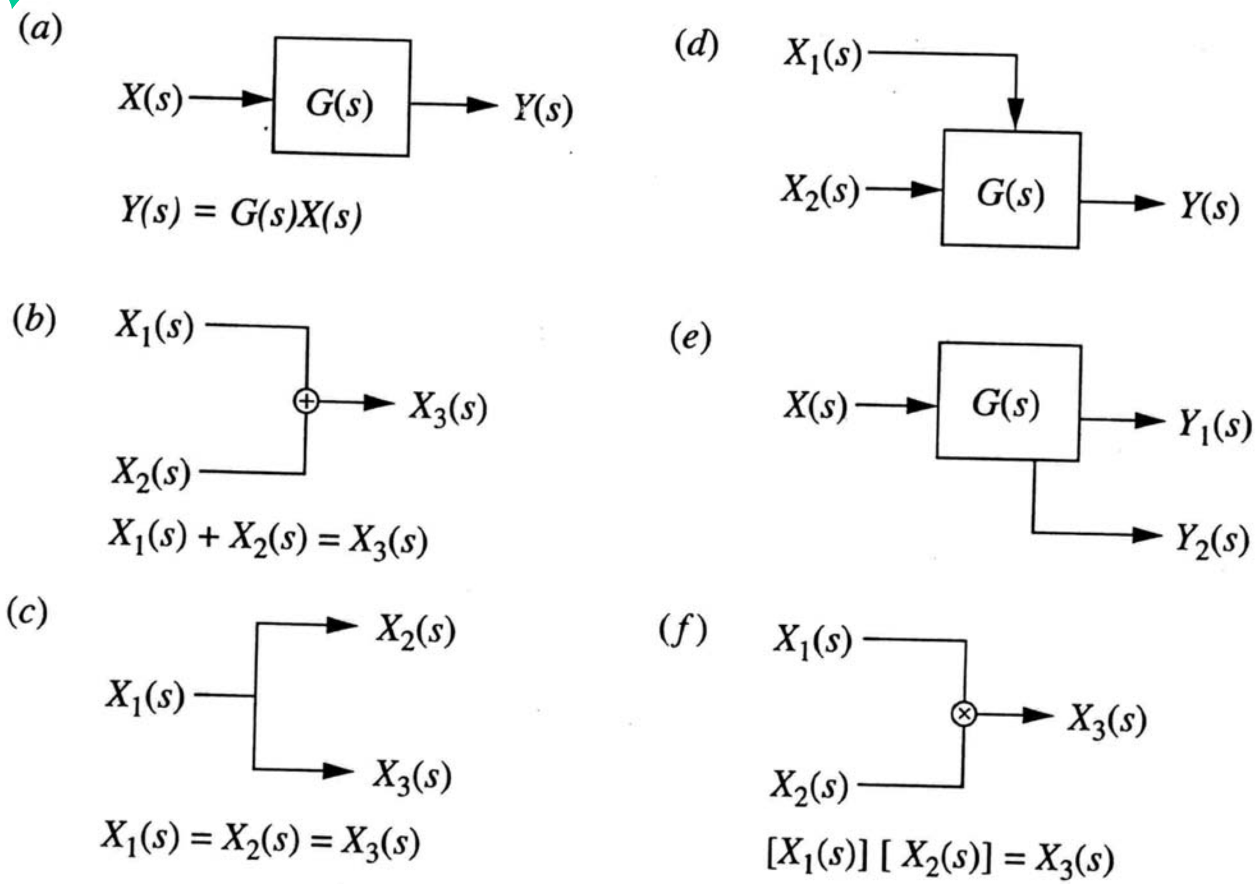
La base es el "Álgebra de Bloques"   que entrega las reglas de interacción, basadas en el principio de los sistemas lineales

Mediante este mecanismo podemos representar sistemas En serie, En Paralelo, con reciclos, con múltiples entradas y salidas, con atrasos.



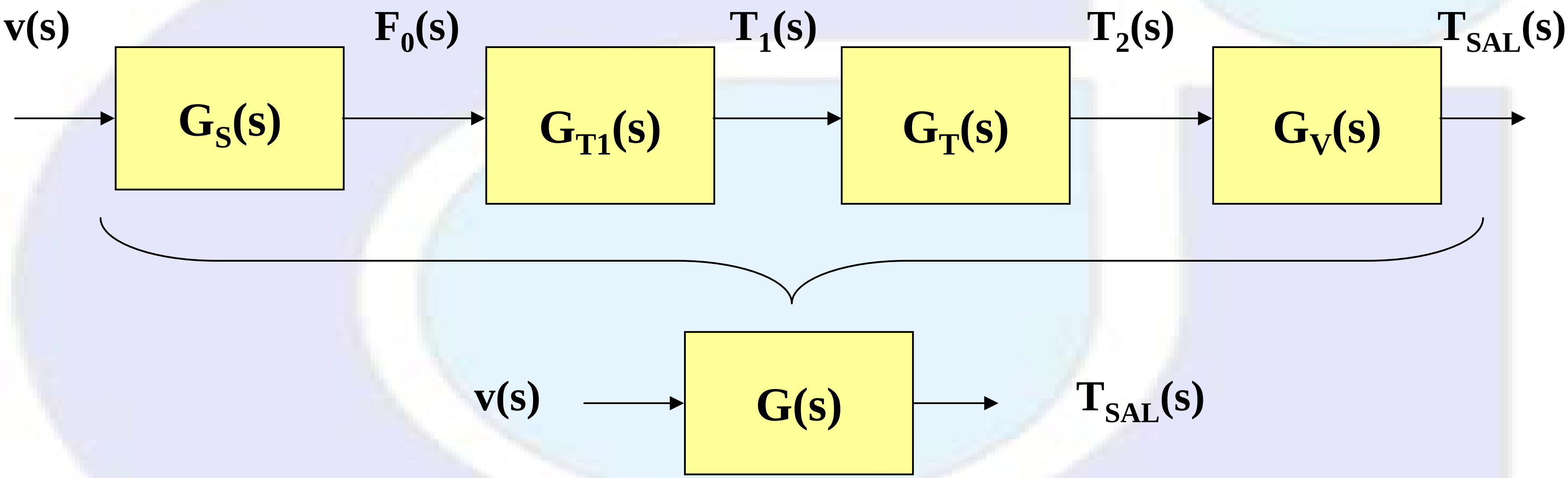


Permitido | No Permitido



SISTEMAS EN SERIE

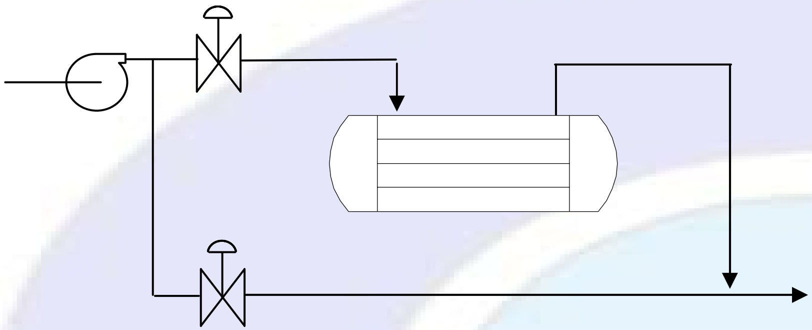
COMBINACION DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

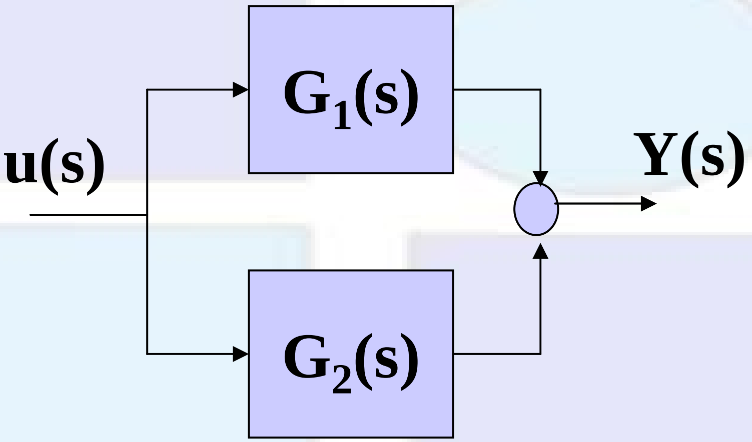


$$\frac{T_{SAL}(s)}{v(s)} = G(s) = \left[\frac{T_{SAL}(s)}{T_2(s)}\right]\left[\frac{T_2(s)}{T_1(s)}\right]\left[\frac{T_1(s)}{F_0(s)}\right]\left[\frac{F_0(s)}{v(s)}\right]$$

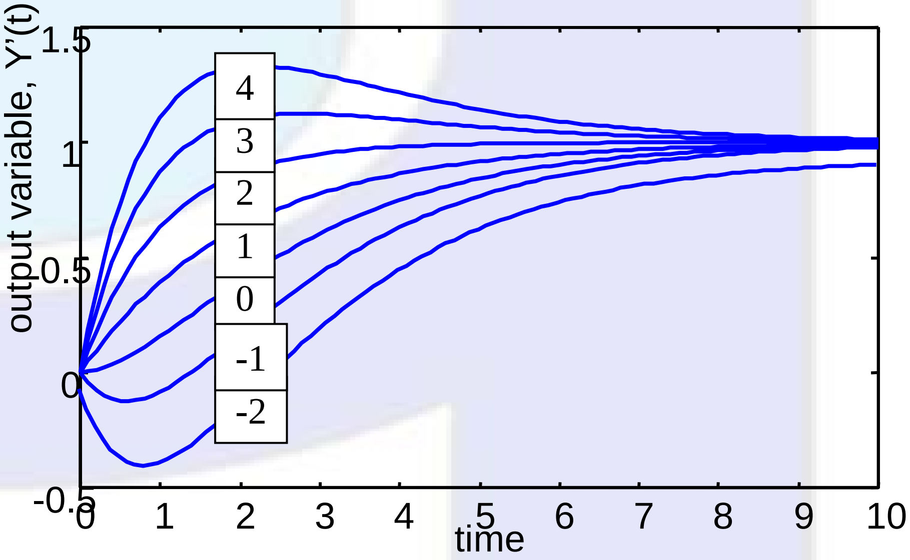
$$G(s) \;= G_S(s) G_{T2}(s) G_{T1}(s) G_V(s)$$

SISTEMAS EN PARALELO





$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{K_p(\tau_i s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$



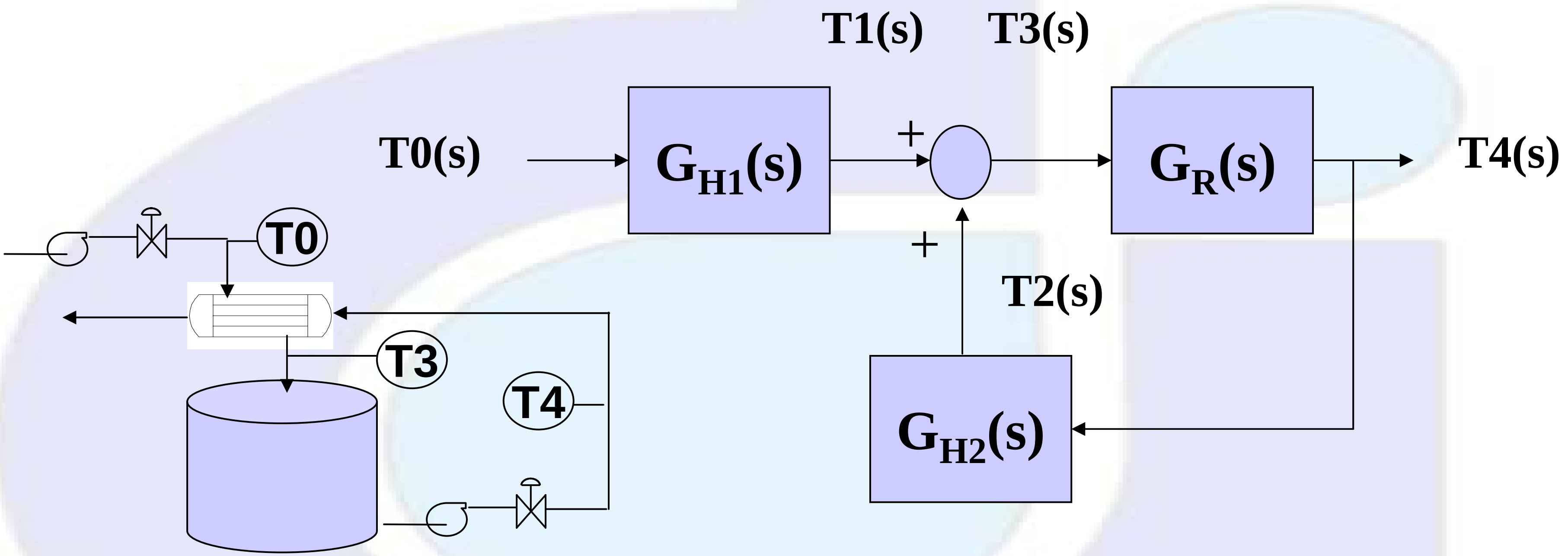
SISTEMAS CON ATRASO

θ = dead time

$$X_{out}(t) = X_{in}(t-\theta)$$

$$X_{out}(s) = e^{-\theta s} X_{in}(s)$$

SISTEMAS CON RECICLO



$$\frac{T4(s)}{T0(s)} = \frac{G_R(s)G_{H1}(s)}{1 - G_R(s)G_{H2}(s)}$$

PASOS PARA ENCONTRAR LA F.T. DE UN PROCESO

- Modelo matemático
- Especificar variables E/S (y,u,d)
- Linealizacion (si es no lineal)
- Variables de Desviación
- Aplicar T.de L
- Despejar y(s) como función de u(s)
- Identificar las G(s);   y(s)/u(s) , y(s)/d(s)

En el proceso adjunto, consideramos V cte y el fluido absorbe una cantidad de calor Q, entrando a una temperatura To (que puede variar), Entonces :