SISTEMAS DE 1º ORDEN

$$\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = K\ u(t)$$

K : Ganancia estática, relación E.E. $K=(\Delta Y/\Delta u)_s$

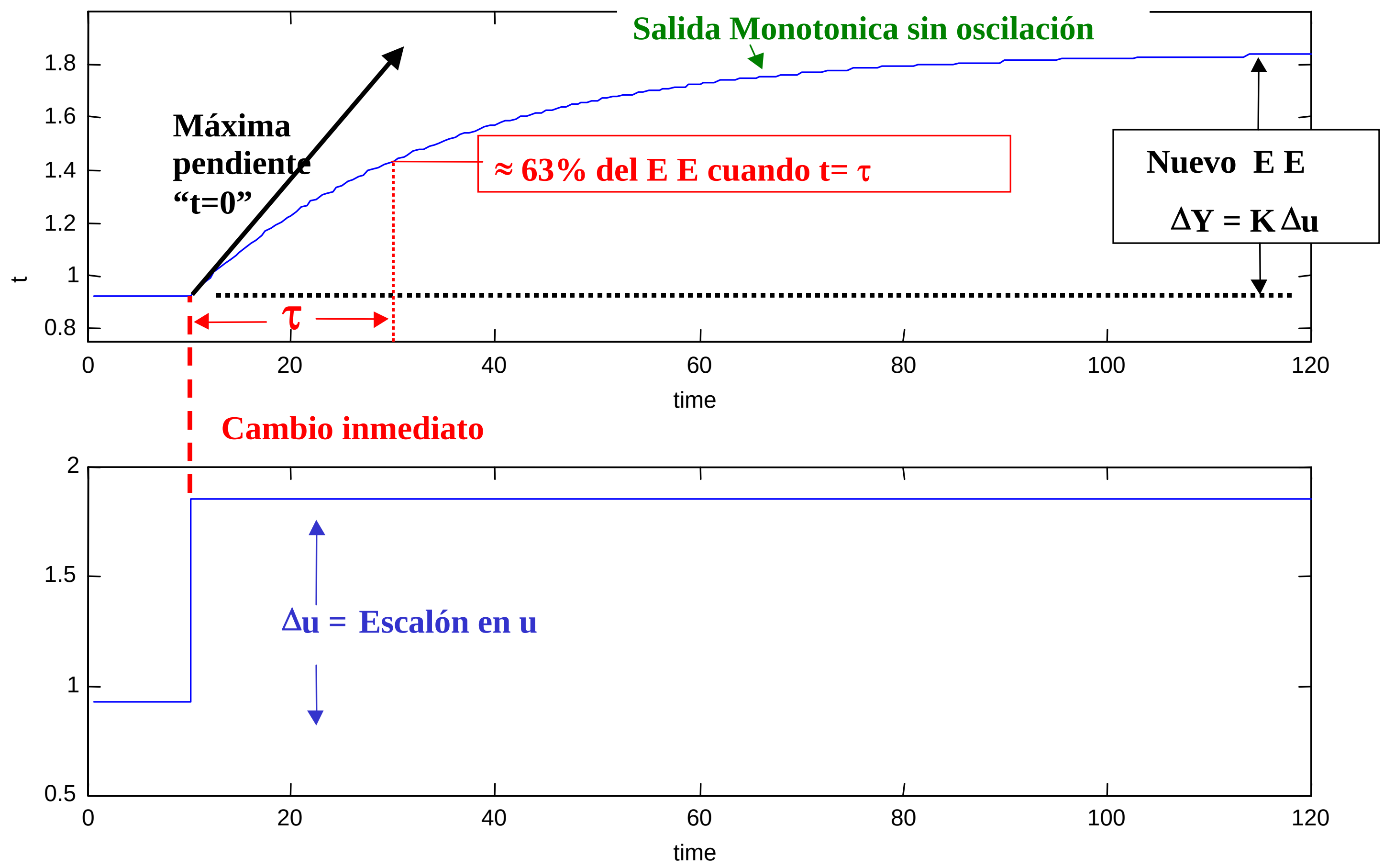
τ : Constante de tiempo (t)

La correspondiente Función de transferencia es:

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{K}{(\tau S + 1)}$$

La solución en el tiempo para un escalón de magnitud A es :

$$Y(t) = AK * (1 - e^{-t/\tau})$$



El Estado estacionario se alcanza aproximadamente en $t = 5*\tau$

Por lo que τ es una medida directa de la rapidez de respuesta

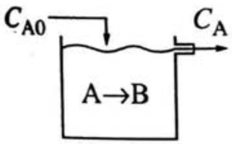
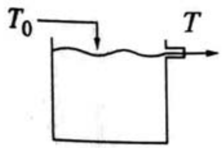
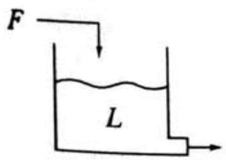
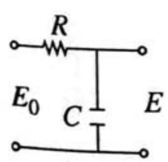
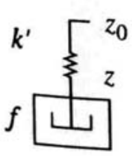
	Balance	Input	Output	K_P	τ
	Component material	C_{A0}	C_A	$\frac{F}{F+Vk}$	$\frac{V}{F+Vk}$
	Energy	T_0	T	1.0	$\frac{V}{F}$
	Overall material	F	L	$\frac{1}{0.5kL_s^{-0.5}}$	$\frac{A}{0.5kL_s^{-0.5}}$
	Current	E_0	E	1.0	RC
	Force	z_0	z	1.0	f/k'

FIGURE 5.2

First-order processes (E = voltage, z = position, k' = spring constant, and f = friction coefficient).

SISTEMAS DE 2º ORDEN

$$\tau^2 \frac{dY^2(t)}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dY}{dt} + Y(t) = K\ u(t)$$

$$\tau = Periodo\, de\, oscilacion\ natural$$

$$\xi = Factor\ de\ Amortiguación$$

$$K = Ganancia\ Estatica$$

La F de T correspondiente es

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{K}{(\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1)}$$

Los sistemas de 2º orden son habitualmente determinados por:

•2 sistemas de primer orden en serie

•2 sistemas de primer orden interactuando (acoplados) ej Masa y energía. O con reciclo

• Sistemas basados en fuerzas (B C M)

La solución de un sistema de segundo orden se puede generalizar según :

$$Y(t) = A_1 e^{s1 t} + A_2 e^{s2 t}$$

Con A1 y A2 Constantes que dependen del tipo de función forzante (u), y s1 y s2 las raíces de la ecuación característica

$$\boxed{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1 = 0}$$

Resolviendo la ecuación, las raíces son:

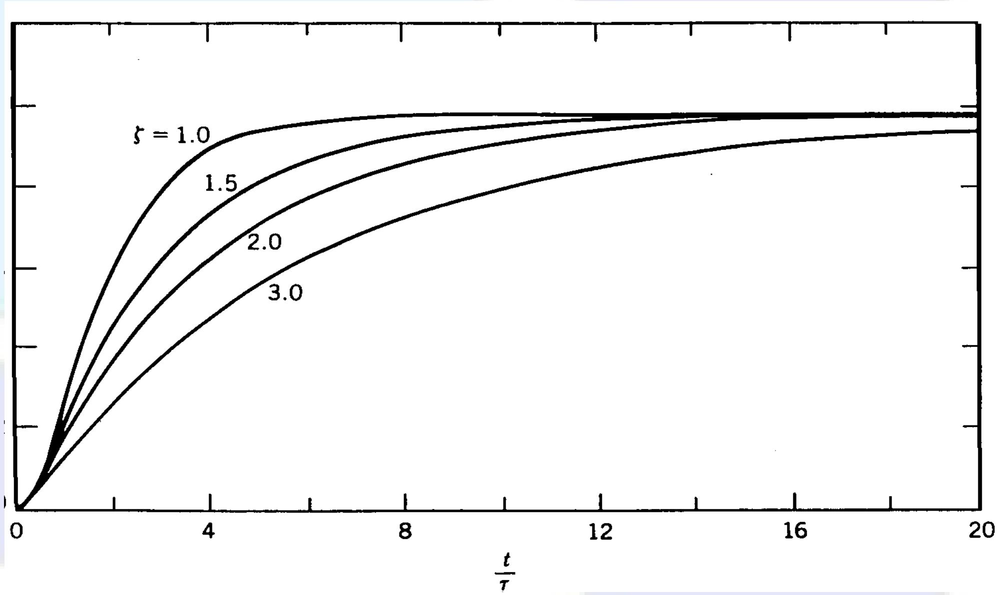
$$S = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

Dependiendo del valor ξ podemos distinguir varios comportamientos:

$\xi > 1$:   s1 y s2 son reales negativos y la solución para Y(t) es exponencial decreciente, por lo que se denomina "Sistema Sobre Amortiguado"

Cuando ξ =1 se denomina "Críticamente Amortiguado"

Ej: 2 sistemas de 1º orden en serie



Si $0 < \xi < 1$:   s1 y s2 son raíces imaginarias conjugadas con parte real negativa y la solución para Y(t) es la superposición de una función sinusoidal y una exponencial decreciente por lo que se denomina "Sistema Sub Amortiguado"

Las raíces se expresan de la forma

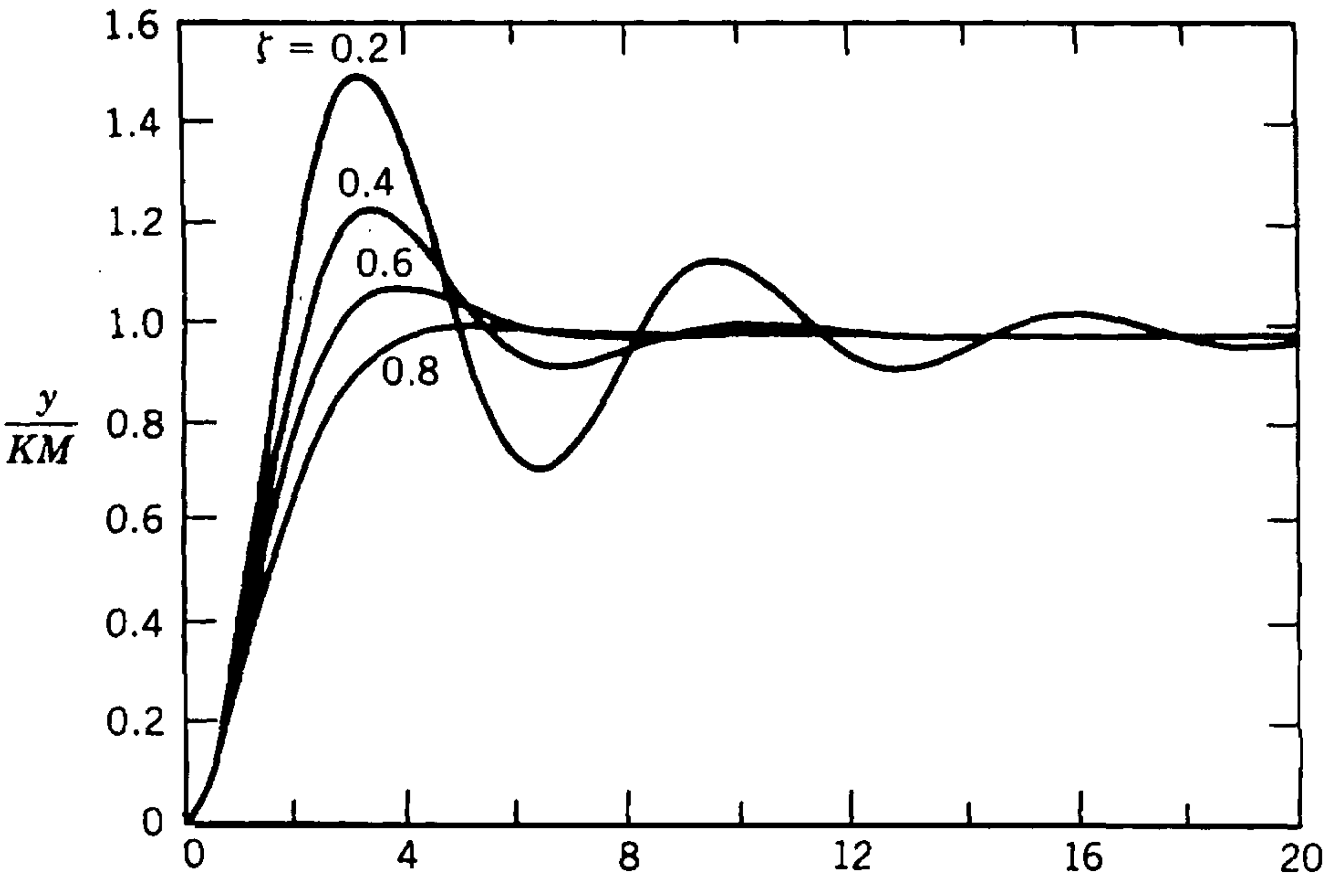
$$S = \frac{-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$$

La solución para un escalón unitario esta dada por:

$$Y(t) = K[1 - \frac{1}{\alpha} e^{-\xi/\tau t} \sin(\omega t + \varphi)]$$

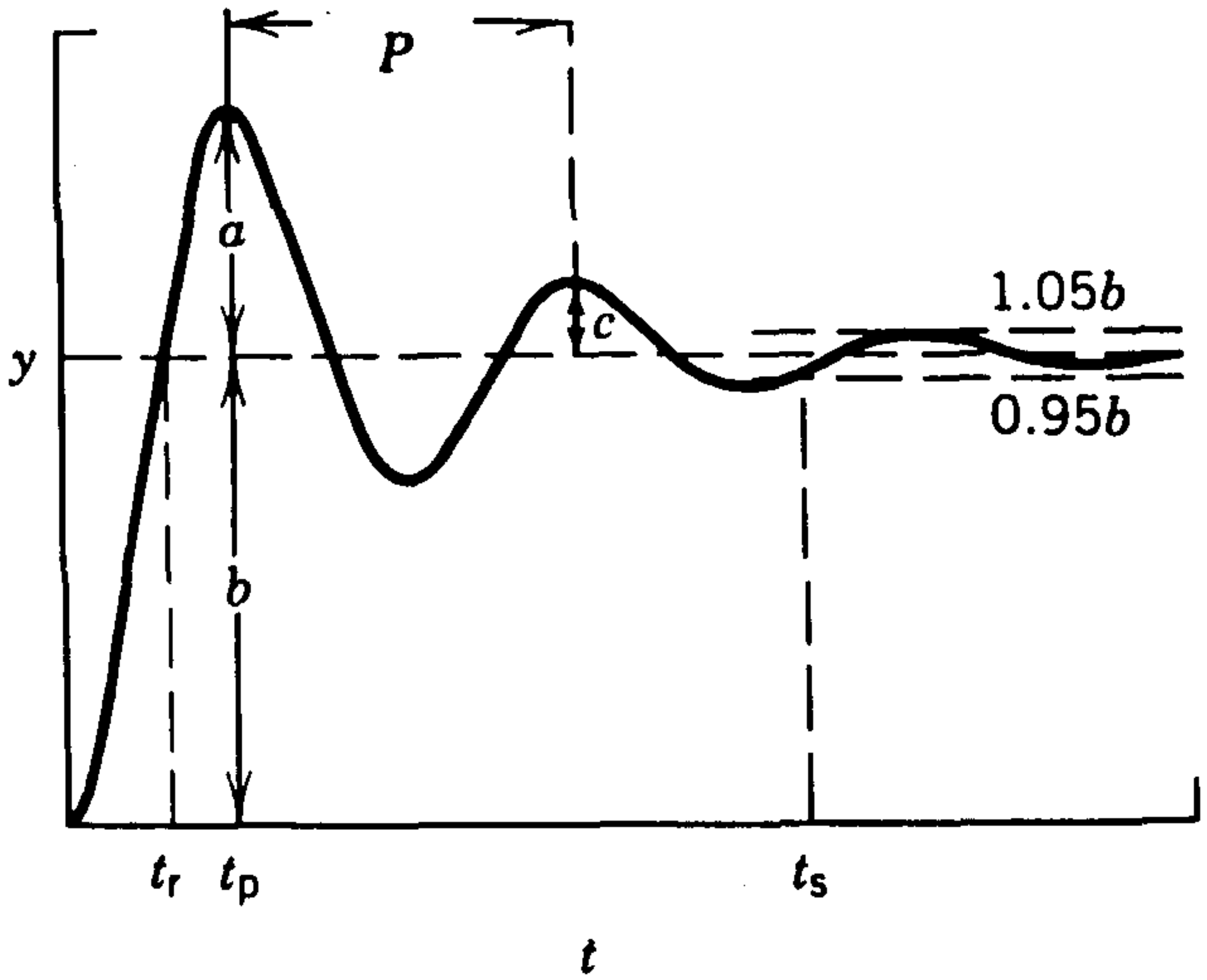
$$\alpha = \sqrt{1-\xi^2} \;\; ; \;\; \varpi = \alpha / \tau$$

$$\varphi = Tan^{-1}(\alpha / \xi)$$



La oscilación aumenta a medida que ξ --> 0

Caracterización de respuesta Sub-Amortiguada



a. Overshoot

$$\frac{a}{b} = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

b. Tiempo 1º maximo

$$t_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

c. Razón de Decaimiento (entre maximos)

$$\frac{c}{a} = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{a^2}{b^2}$$

d. Período de oscilación

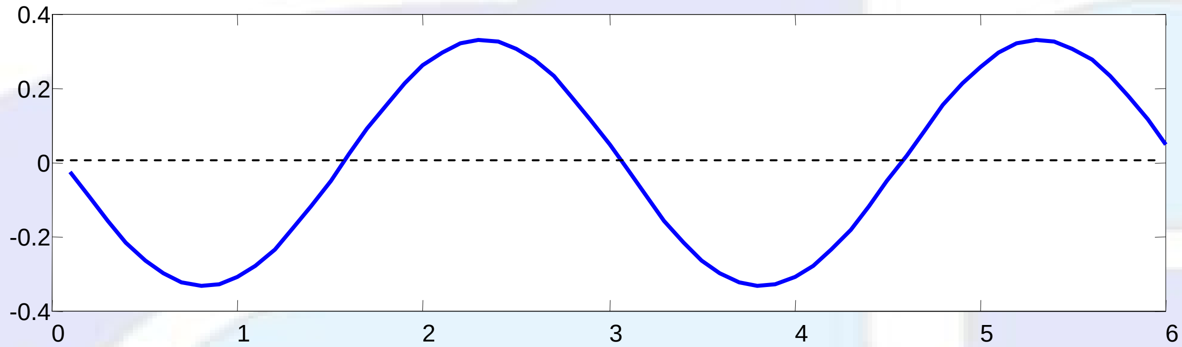
$$p = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

La respuesta sub-amortiguada es característica de los sistemas acoplados o retro-alimentados

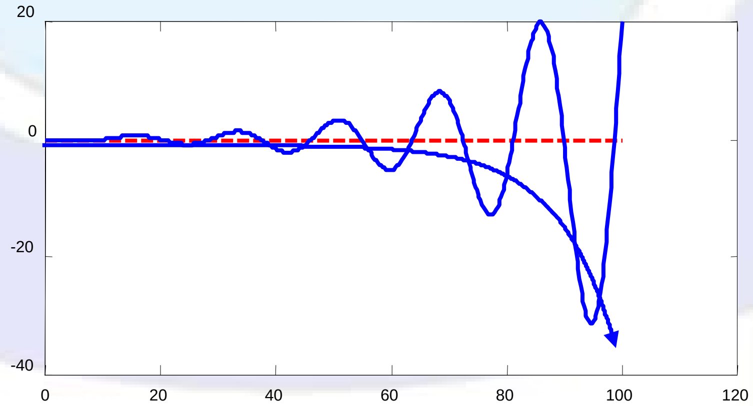
Ejemplo, dos sistemas de 1º Orden retroalimentados resultan en un sistema de 2º orden sub-amortiguado

Una regla de control dice que un sistema está controlando bien si responde con razón de decaimiento 1:4

Si $\xi = 0$ El sistema oscila armónicamente ya que la raíz es puramente imaginaria, $s = \pm i/\tau$



Si $\xi < 0$ El sistema posee raíces con parte real positiva lo que incorpora exponencial positivo en la solución ==> Sistema Inestable



SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR

Supongamos un sistema de orden n con F T dada por

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{K}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_1 S + 1}$$

La solución general estará dada por las raíces de la ecuación característica. Si asumimos que las n raíces son reales, imaginarias o iguales, la solución global será del tipo

$$\mathbf{Y(t)} = A_0 + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \mathbf{\ldots} + \mathbf{(}B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \mathbf{..)}e^{\alpha_p t} +$$

$$\mathbf{\ldots} + \mathbf{[}C_1 \mathbf{\cos(}\omega t\mathbf{)} + C_2 \mathbf{\sin(}\omega t\mathbf{)]}e^{\alpha_q t} + \mathbf{\ldots}$$

La respuesta global es la superposición de cada término.

Se puede concluir que el sistema será:

•Oscilatorio si aparecen raíces imaginarias

•Sobre-Amortiguado si las raíces son reales negativas

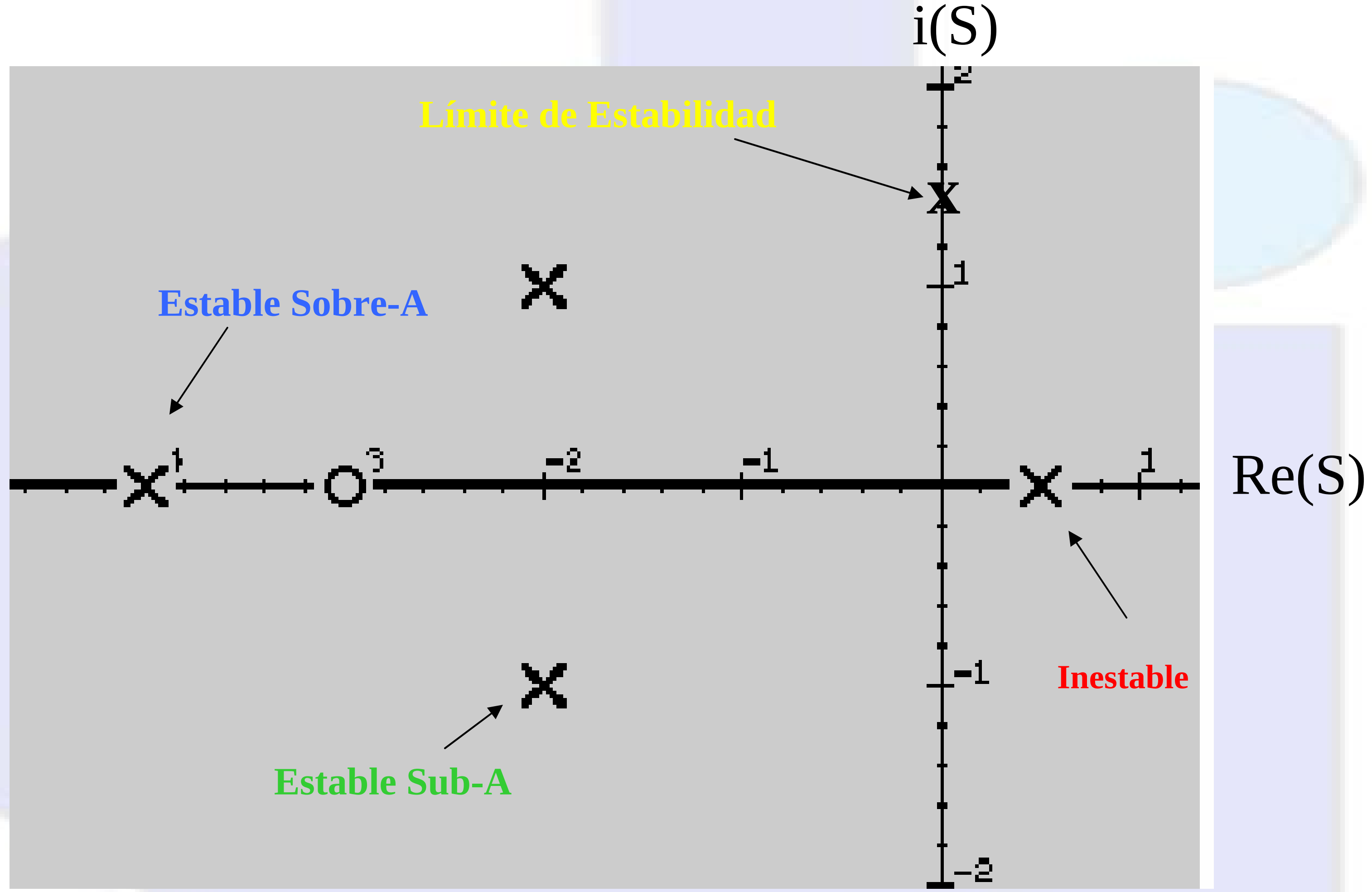
•Sub-Amortiguado si las raíces son imaginarias con parte real negativa.

•Inestable si al menos una raíz tiene parte real positiva

DEFINICION DE ESTABILIDAD

"Un sistema es estable si para una entrada acotada, responde con una salida acotada"

En términos prácticos un sistema dinámico lineal es estable si los polos de la F.T están a la izquierda del plano complejo


i(S)
Re(S)
Límite de Estabilidad
Estable Sobre-A
Estable Sub-A
Inestable
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
1