SISTEMAS DINAMICOS LINEALES

Los sistemas lineales son la base para el desarrollo de la teoria de sistemas dinámicos. La razon es que estos sistemas poseen solución analítica por lo que su comportamiento puede ser determinado de manera exacta.

Un sistema dinámico lineal esta descrito por la siguiente ODE

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 u(t).$$

La mayoría de los equipos y sistemas utilizados en la industria de procesos presentan características complejas (parámetros variables, variables acopladas, efectos no lineales) por lo que generalmente los modelos son No-lineales sin solución analítica , lo que restringe un análisis general.

Para desarrollar un análisis aproximado se recurre a la técnica de "LINEALIZACION" que consiste en aproximar un modelo complejo en un modelo Lineal que posee solución analítica

LINEALIZACION

Aproximación de una función o término no-lineal en lineal mediante aproximación de serie de Taylor alrededor de un punto Xs

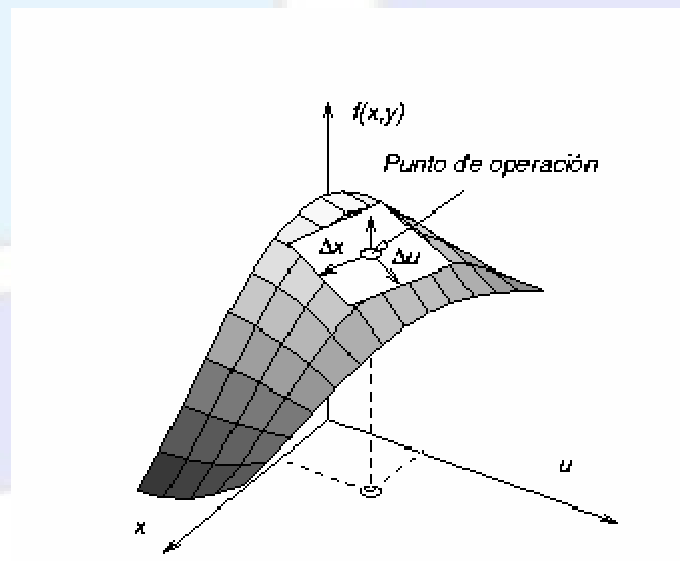
Variable independiente

$$F(x) = F(x_s) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_s} (x - x_s) + \cancel{\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x_s} (x - x_s)^2} + R$$

Términos constantes , evaluados en x_s

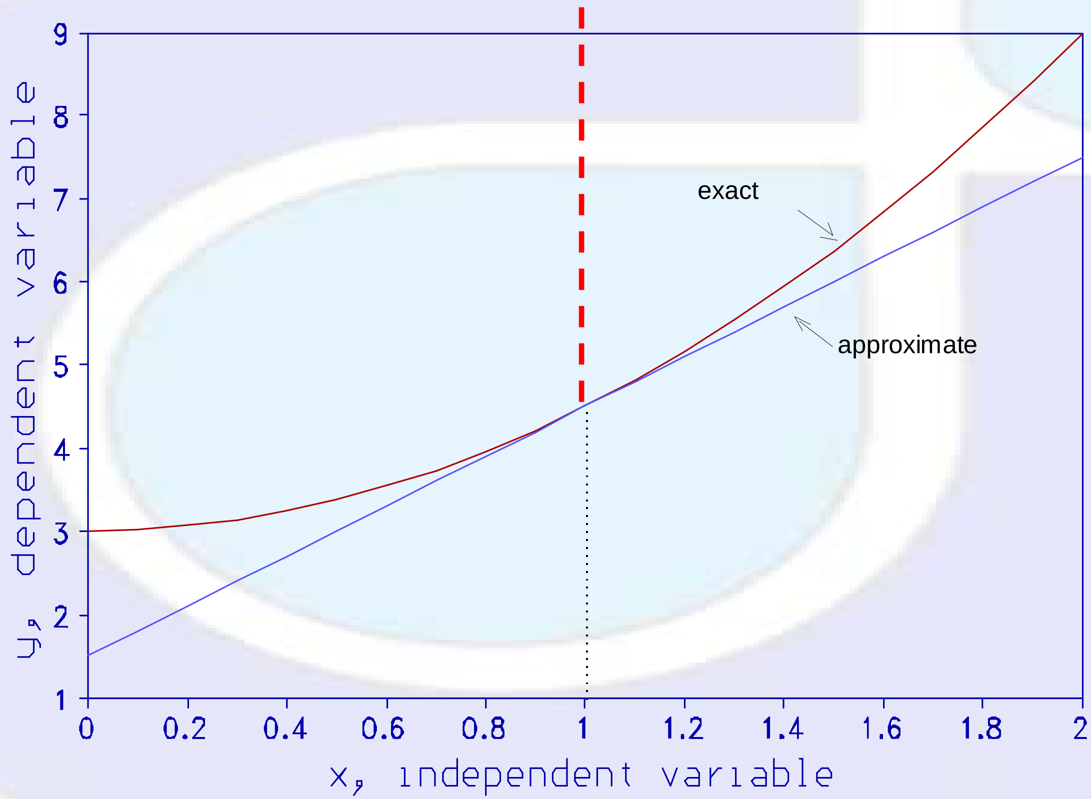
La linealizacion se puede extender a sistemas multivariables. Es decir el punto de operación esta determinado por mas de una variable (Entrada o salida)

$$F(x,u) = F(x_S, x_S) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x,u)_S} (x - x_S) + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{(x,u)_S} (u - u_S)$$



$y = 1.5\,x^2 + 3$ en el punto $x = 1$;

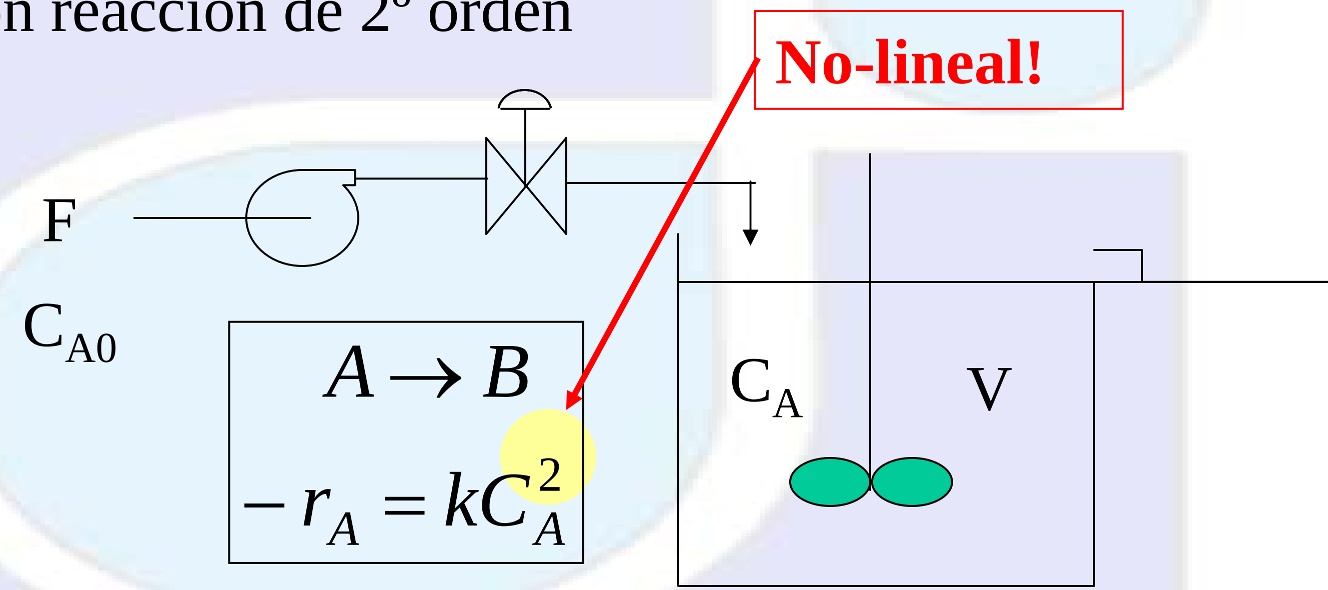
$y_{lin} = 4.5 + 3*(x-1)$



La aproximación es exacta en en punto de linealización

APLICACION A UN SISTEMA DINAMICO

Consideremos un sistema dinámico no lineal compuesto por un RTAC con reacción de 2º orden



$$V * \frac{dC_A}{dt} = F * C_{Ao} - F * C_A - kVC_A^2$$

¿ES LINEAL O NO LINEAL?

$$V*\frac{dC_A}{dt} = F*C_{Ao} - F*C_A - kVC_A^2$$

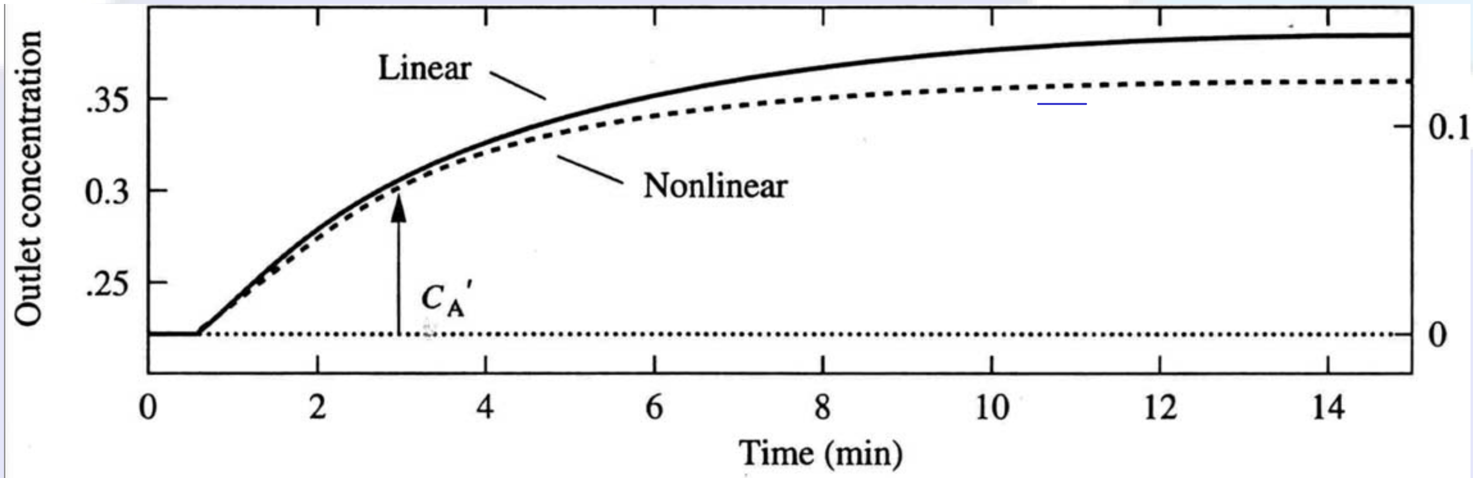
Si F es Constante:	L	L	L	NL
Si F es variable	L	NL	NL	NL

En el caso i: linealizar en torno al punto C_{As}

$$V*\frac{dC_A}{dt} = F*C_{Ao} - F*C_A - kV[C_{As}^2 + 2*C_{As}*(C_A - C_{As})]$$

Caso ii en clases

A modo de comparación se pueden analizar las dos soluciones



Obs: La aproximación es razonable desde el punto de vista temporal. Sin embargo, existe diferencia en el estado estacionario final (Off-set)

VARIABLES DE DESVIACION

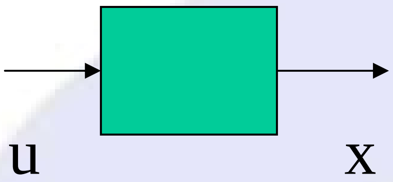
Junto con linealizar un sistema es conveniente "referir" su respuesta con respecto a un punto específico de operación, generalmente el punto de linealización Xs

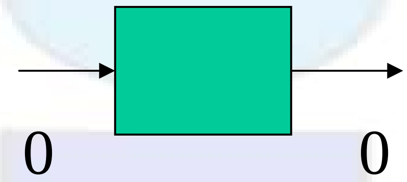
Se definen las variables de desviación de un sistema según

$$\bar{X} = X - X_S;$$

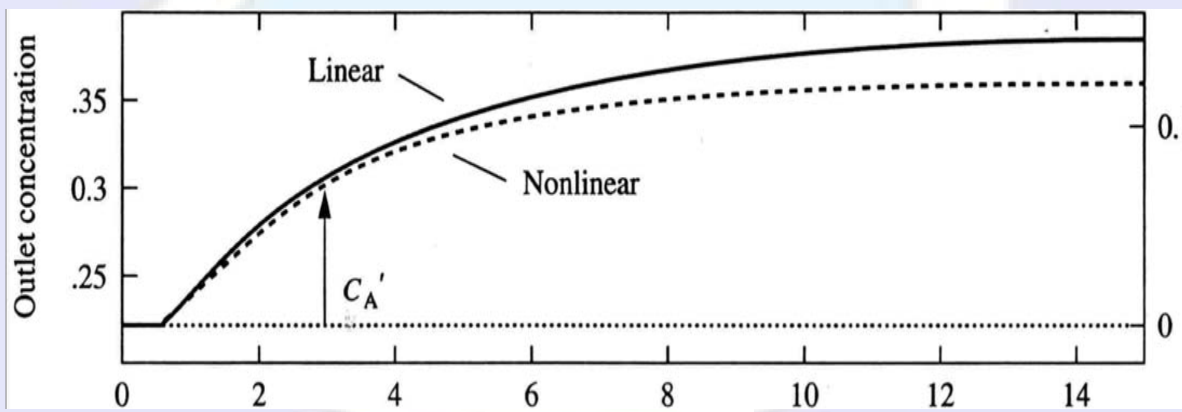
$$\bar{u} = u - u_S$$

Las ventajas es que al expresar el sistema en variables de desviación, el punto del sistema linealizado es (0,0)





X



$\bar{X}$

Otra ventaja importante es que cuando los sistemas dinamicos lineales se expresan en variables de desviacion, desaparecen los terminos constantes

$$\frac{dX}{dt} + aX + c = bU$$

$$\frac{d\,\overline{X}}{dt} + a\,\overline{X} = b\overline{U}$$

Demostración en clases