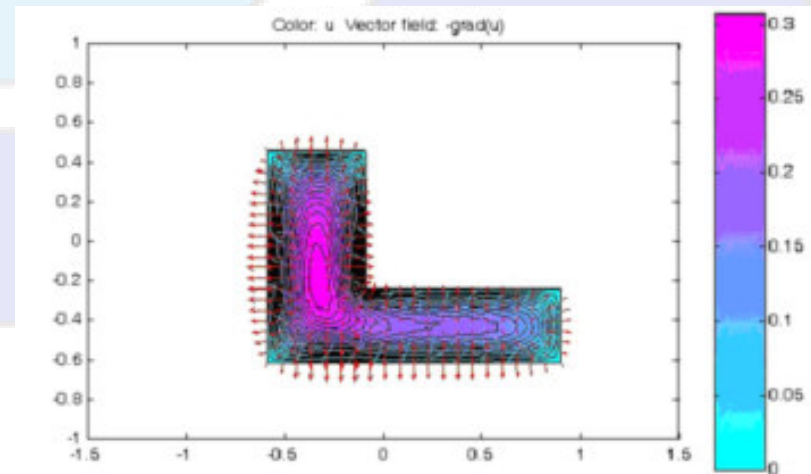


MODELACION Y SIMULACION DE PROCESOS

MODELOS COMPUESTOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Prof: Francisco Cubillos M



Cuando se plantean modelos de balance a propiedades conservativas en medios continuos en un volumen de control diferencial con mas de una dimensión se obtienen modelos con ecuaciones diferenciales parciales (PDE o EDP).

Las formas más usuales de estas ecuaciones son:

Ecuación parabólica:

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(c\nabla u) + au = f$$

Ecuación hiperbólica:

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla(c\nabla u) + au = f$$

Ecuación elíptica:

$$-\nabla(c\nabla u) + au = f$$

Ecuación de valores propios:

$$-\nabla(c\nabla u) + au = \lambda du$$

Las condiciones de frontera para una función escalar u pueden ser de dos tipos:

Dirichlet: $hu = r$ en la frontera $\partial\Omega$.

Neumann generalizado: $\vec{n}(c\nabla u) + qu = g$ en la frontera $\partial\Omega$.

\vec{n} es el vector unitario dirigido hacia fuera del dominio Ω .

g , q , h y r son funciones complejas definidas dentro del dominio Ω .

El método tradicional de solución numérica toma los siguientes pasos:

- Descripción de la geometría
- Generación de la malla de elementos
- Discretizar la ecuación y CB
- Solución del sistema de ecuaciones
- Graficar resultados

La tecnología computacional ha desarrollado programas orientados a la solución de estos problemas considerando la automatización de los pasos anteriores.

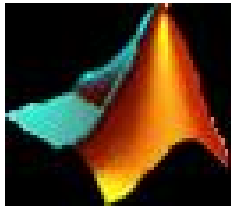
Aunque matemáticamente las ecuaciones son similares, los programas están clasificados considerando la aplicación final.

Así tenemos programas para:

- Análisis de esfuerzos mecánicos
- Fluido dinámica computacional (CFD)
- Sistemas electromagnéticos
- Genéricos para uso general.

En el área de ingeniería de procesos son usados los de tipo CFD y de configuración general para resolver problemas de Fluido-dinámica, Transferencia de Calor, Transferencia de Masa, reactores, etc.






Los programas más conocidos son: COMSOL, Fluent, CFX, PDE de Matlab, FeatFlow (gratis)

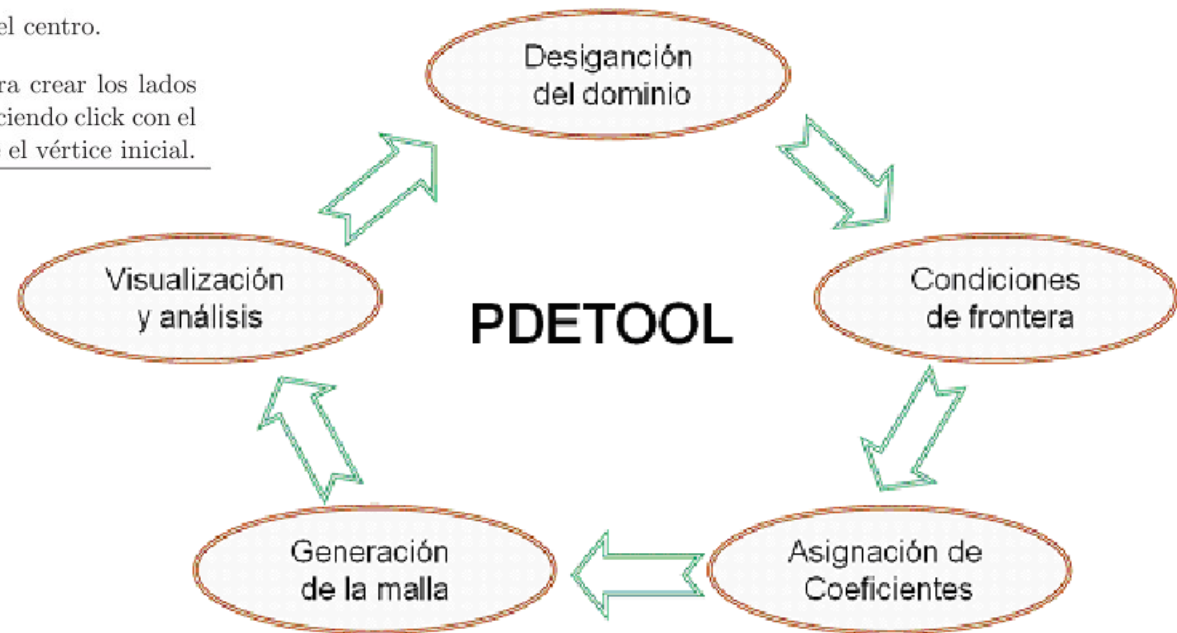









PDE Toolbox de Matlab

Es una herramienta de MATLAB que facilita la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). La solución presentada se obtiene haciendo uso del método de elementos finitos para problemas definidos sobre dominios limitados y continuos en el plano.

- Transferencia de calor en tanto en estado estable como en transitorio.
- Flujos en medios porosos y problemas de difusión.
- Propagación de ondas transitorias y armónicas.
- Movimientos transversales en membranas.
- Determinación de estados de vibración natural de membranas y problemas de estructuras mecánicas.

-  Dibuja un rectángulo/cuadrado comenzando en una esquina.
-  Dibuja un rectángulo/cuadrado comenzando en el centro.
-  Dibuja una elipse/círculo comenzando en el perímetro.
-  Dibuja una elipse/círculo comenzando en el centro.
-  Dibuja un polígono. Pincha y arrastra para crear los lados del polígono. El polígono puede cerrarse haciendo click con el botón derecho del ratón o pinchando sobre el vértice inicial.



-  Entra en el modo para especificar condiciones de frontera.
-  Abre el cuadro de diálogo para especificar la EDP a resolver.
-  Inicializa la malla triangular.
-  Refina la malla triangular.
-  Resuelve la EDP.
-  Abre el cuadro de diálogo para representar los resultados.
-  Zoom on/off.

Opción Heat Transfer en PDE de Matlab

(Análogo para Difusión)

Heat Transfer

The heat equation is a parabolic PDE:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q + h \cdot (T_{ext} - T)$$

It describes the heat transfer process for plane and axi-symmetric cases and uses the following parameters:

- Density ρ
- *Heat capacity* C
- *Coefficient of heat conduction* k
- *Heat source* Q
- *Convective heat transfer coefficient* h
- External temperature T_{ext}



The term $h \cdot (T_{ext} - T)$ is a model of transversal heat transfer from the surroundings, and it may be useful for modeling heat transfer in thin cooling plates etc.

For the steady state case, the elliptic version of the heat equation,

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = Q + h \cdot (T_{ext} - T)$$

is also available.

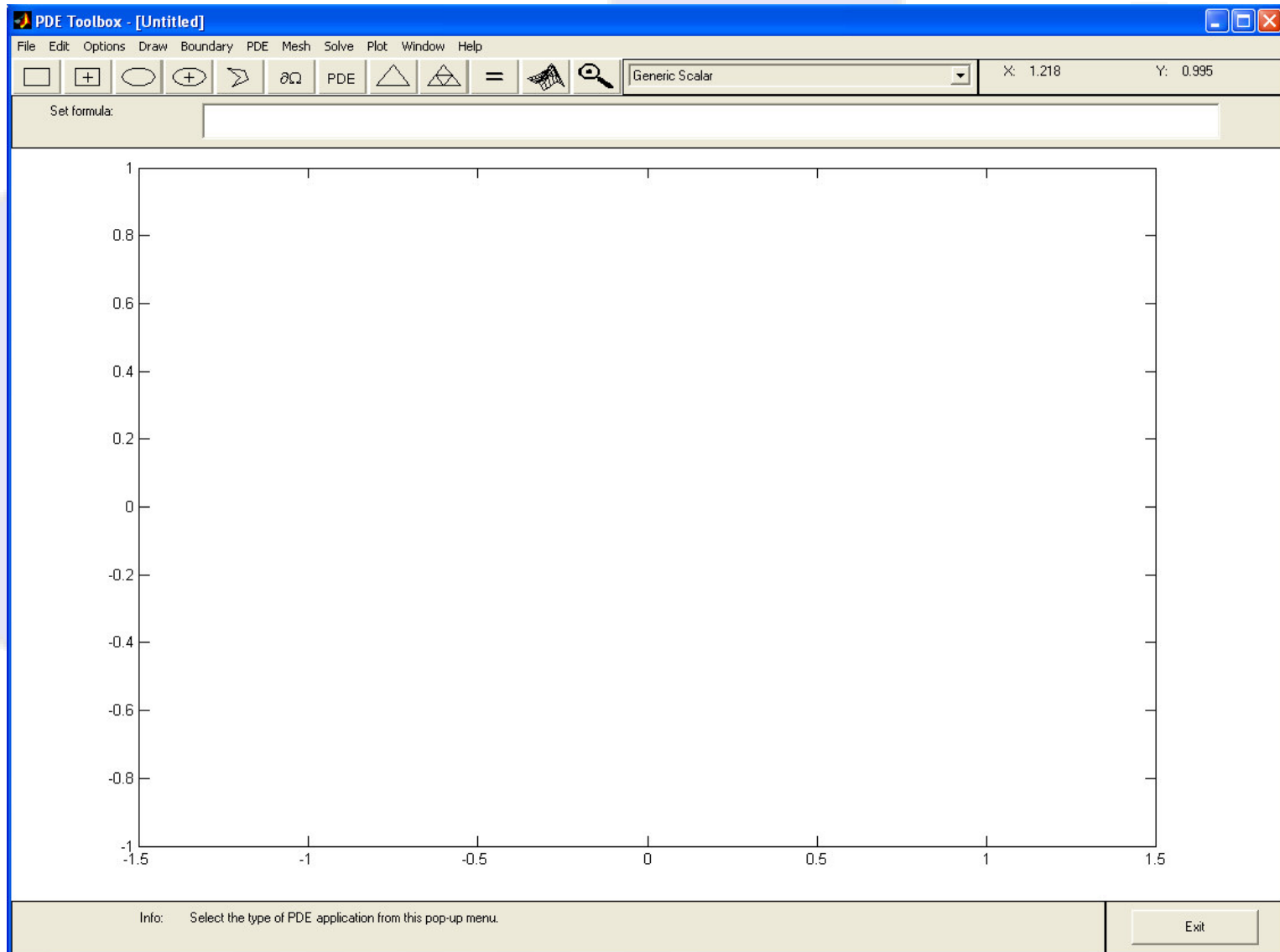
The boundary conditions can be of Dirichlet type, where the temperature on the boundary is specified, or of Neumann type where the *heat flux*, $\mathbf{n} \cdot (k\nabla(T))$ is specified. A generalized Neumann boundary condition can also be used. The generalized Neumann boundary condition equation is $\mathbf{n} \cdot (k\nabla(T)) + qT = g$, where q is the heat transfer coefficient.

Visualization of the temperature, the temperature gradient, and the heat flux $k\nabla T$ is available. Plot options include *isotherms* and heat flux vector field plots.



En Matlab activar : pdetool

Aparece la ventana de desarrollo del PDE



Los siguientes pasos se deben desarrollar en un modelo de PDE toolbox:

- 1. Especificar la situación física de la lista (genérica o específica)**
- 2. Construir la geometría “ el dominio” (mouse o comandos)**
- 3. Especificar las condiciones de borde en todo el dominio**
- 4. Especificar el tipo de PDE según el problema a resolver**
- 5. Inicializar y refinar la malla**
- 6. Solucionar y graficar**
- 7. Exportar resultados**

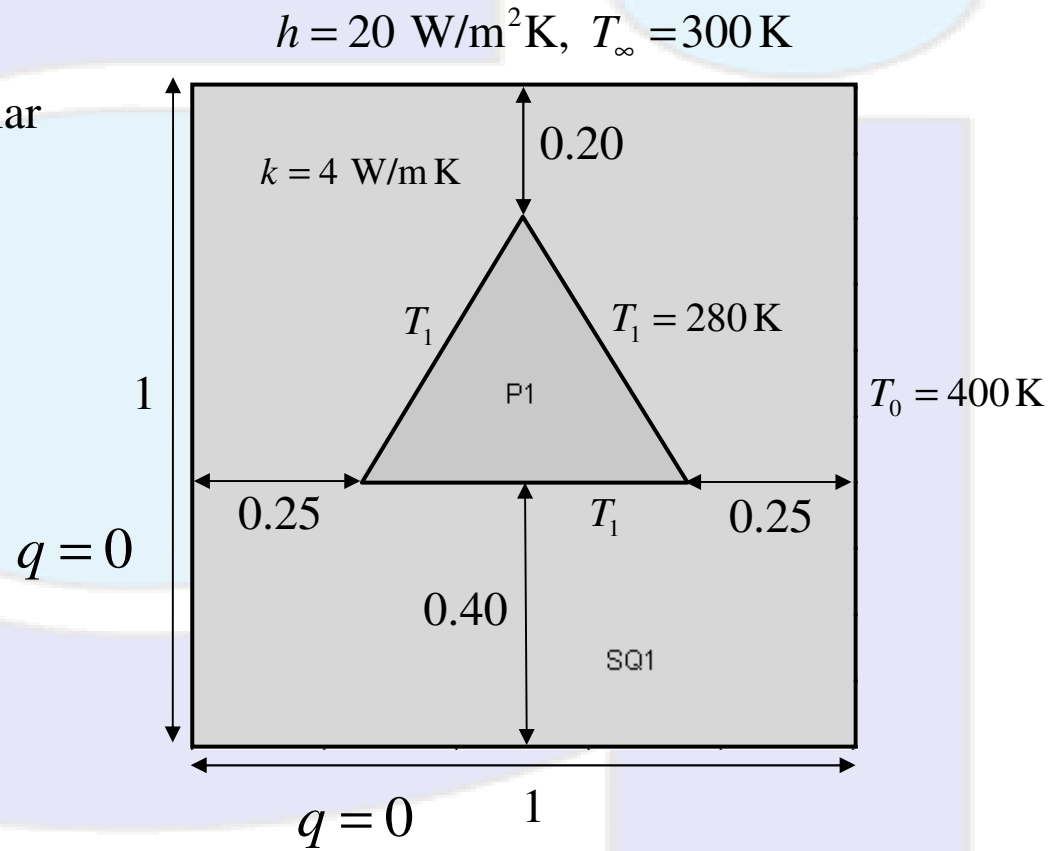
Como ejemplo resolveremos el siguiente caso

Area rectangular con orificio triangular

Condiciones convectivas

Adiabaticas

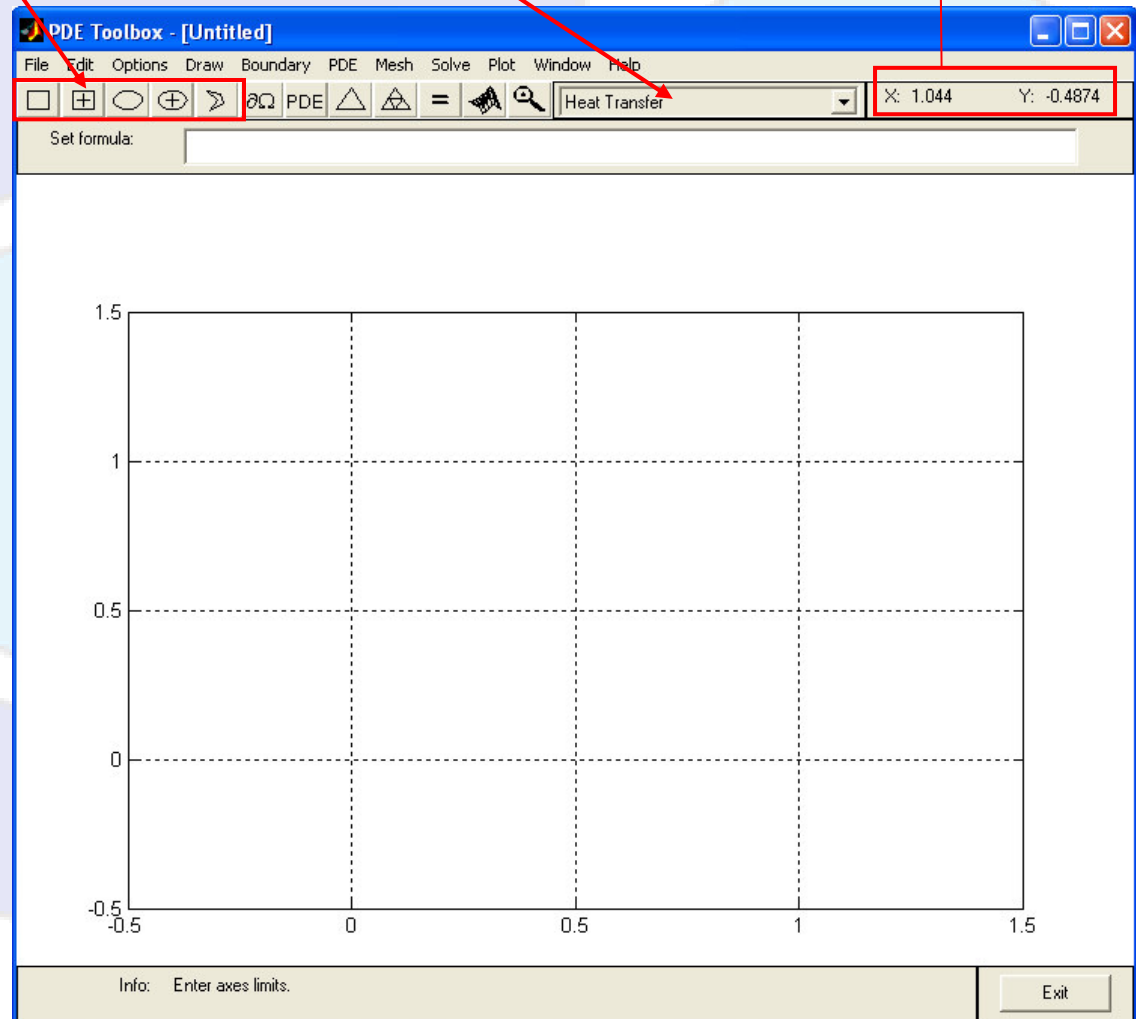
T constante



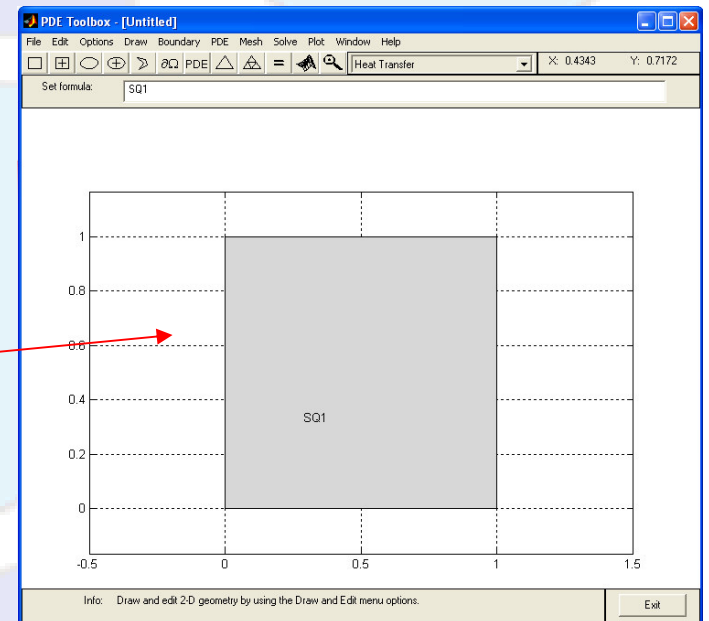
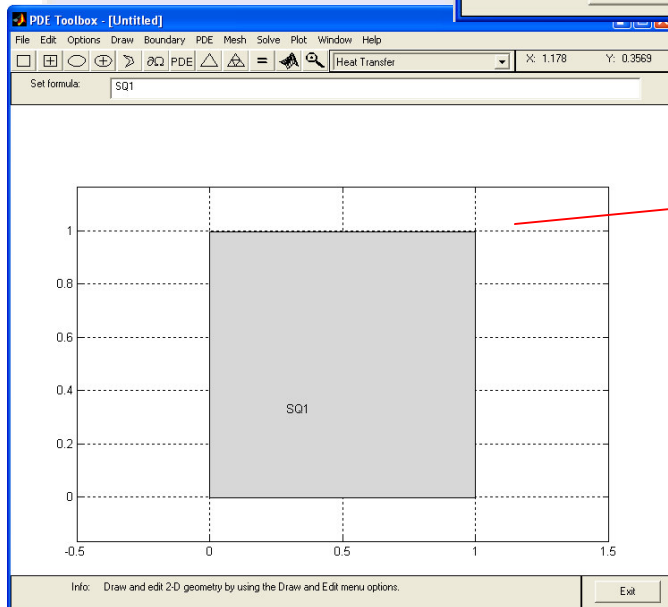
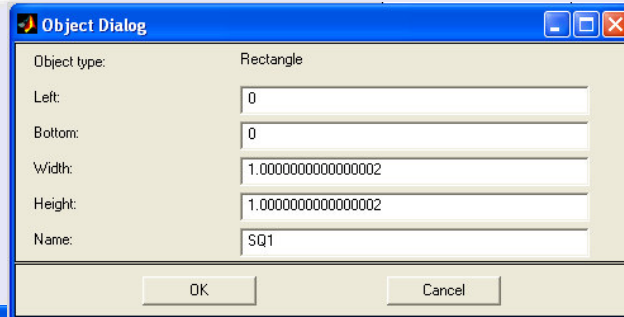
- Seleccionar 'Heat Transfer'
- Construir geometría

Coordenadas del Mouse

- 'Opciones' → 'Axes Equal'
- 'Opciones' → 'Axes Limits'...
set t -0.5 to 1.5 for x and y.
- 'Options' → 'Grid'
- Graficar el rectangulo y el
triangulo interior segun la
geometria del problema

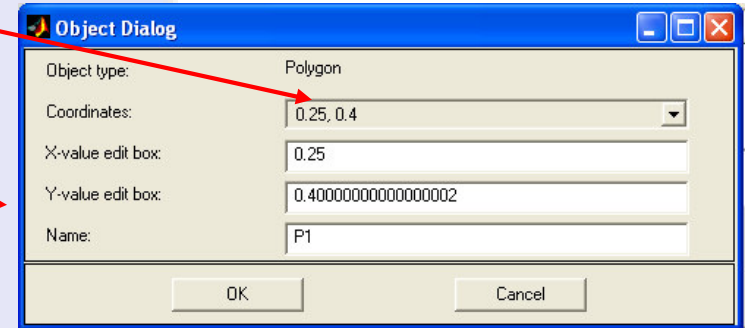


- Afinar con mouse

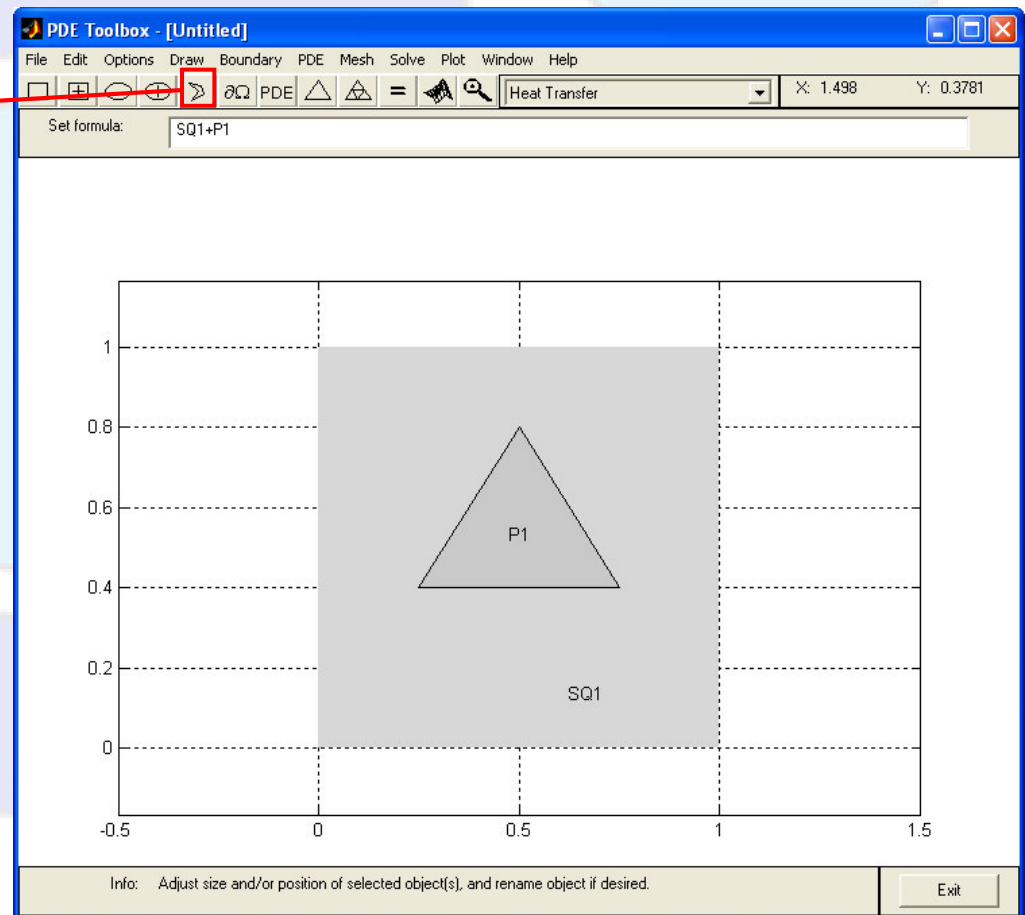


- Triangulo

Punto

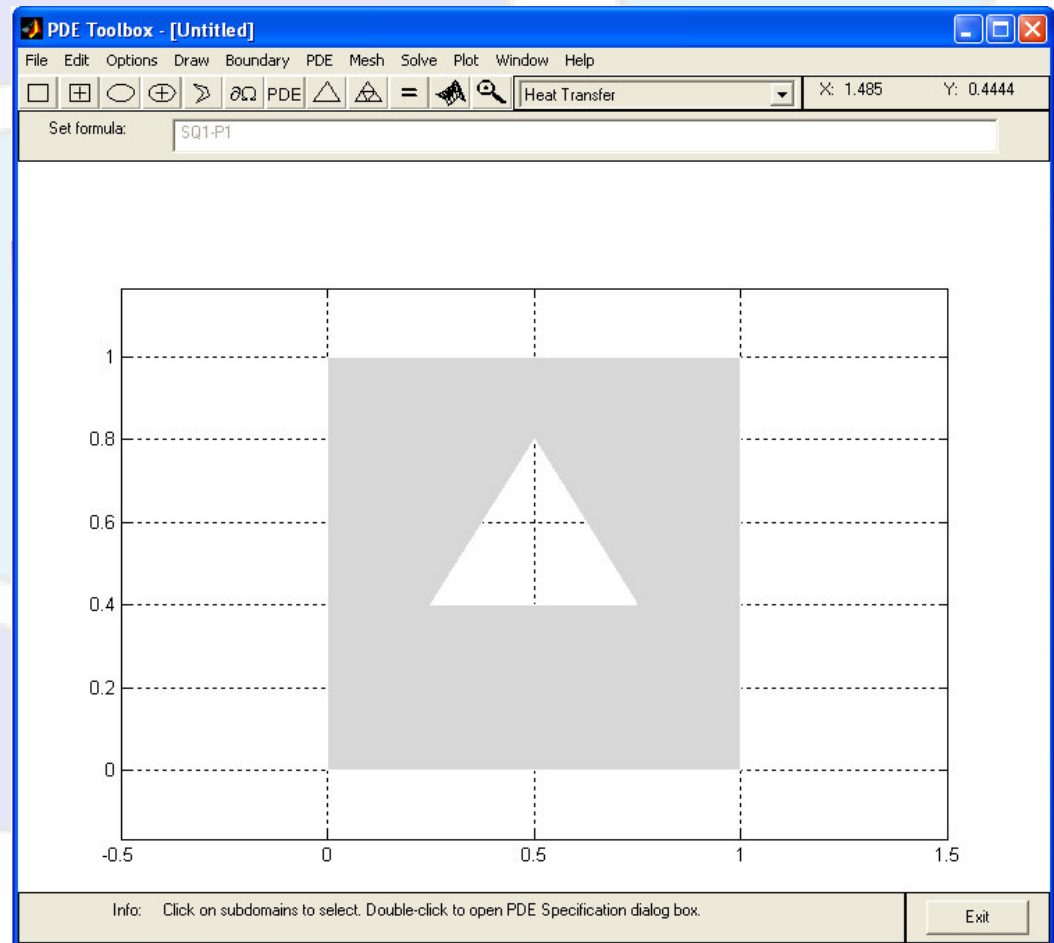


- Triangulo con poligono

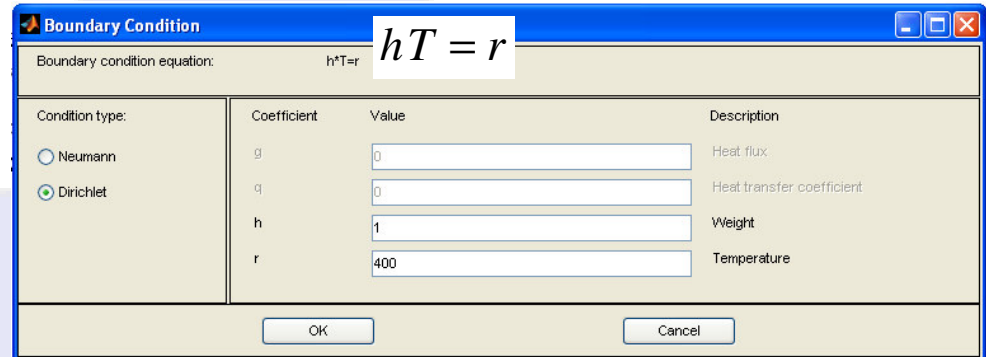


El cuadrado es SQ1 y el P1 el triángulo

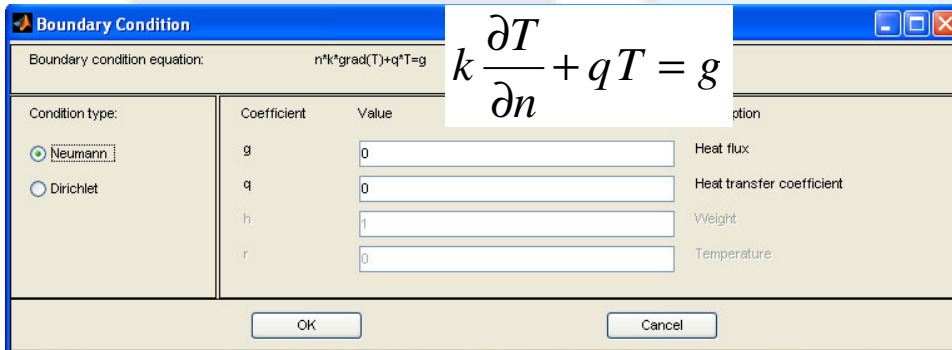
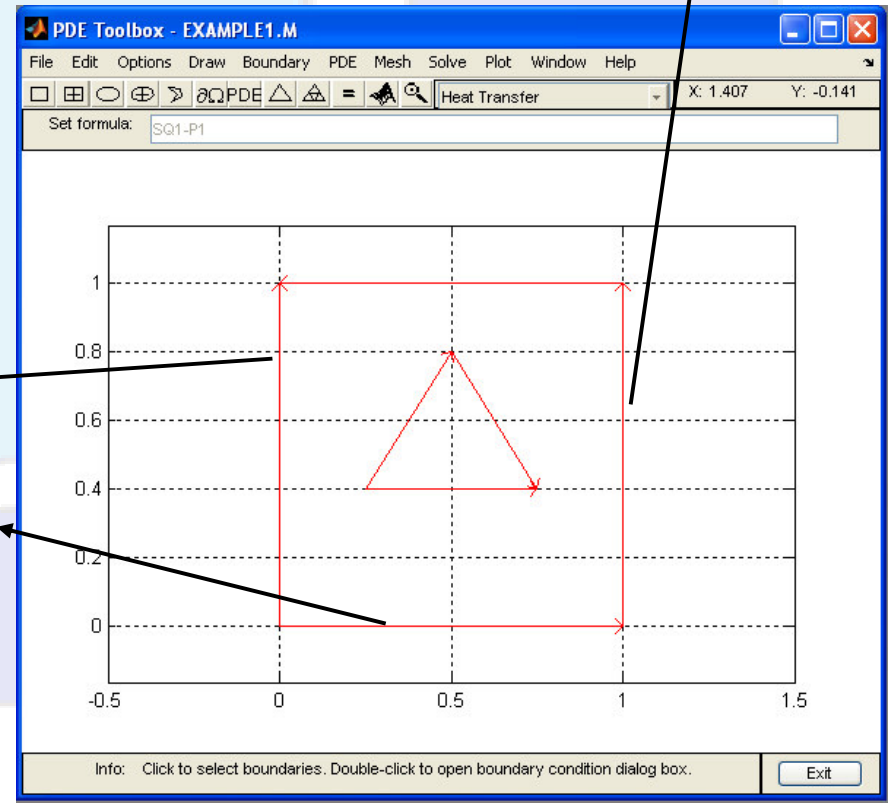
El dominio es SQ1-P1



- Condiciones de Borde

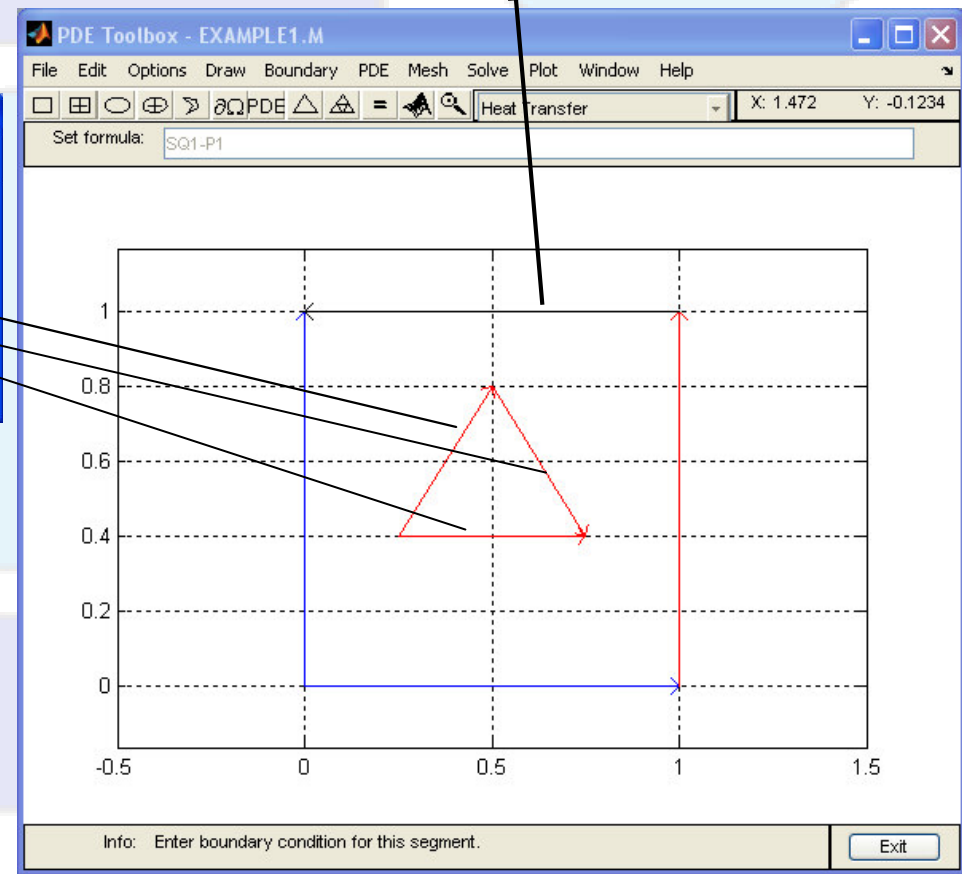
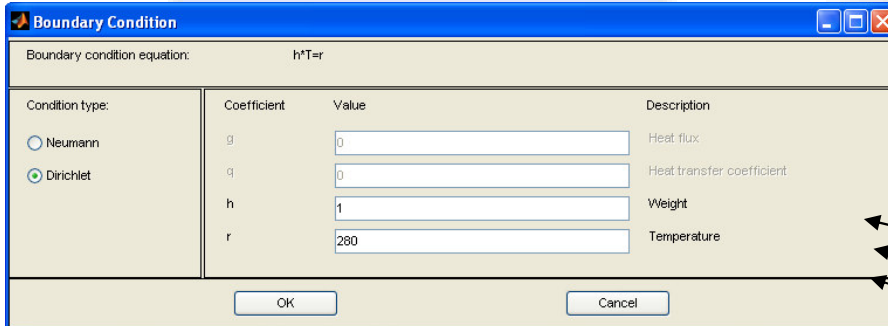
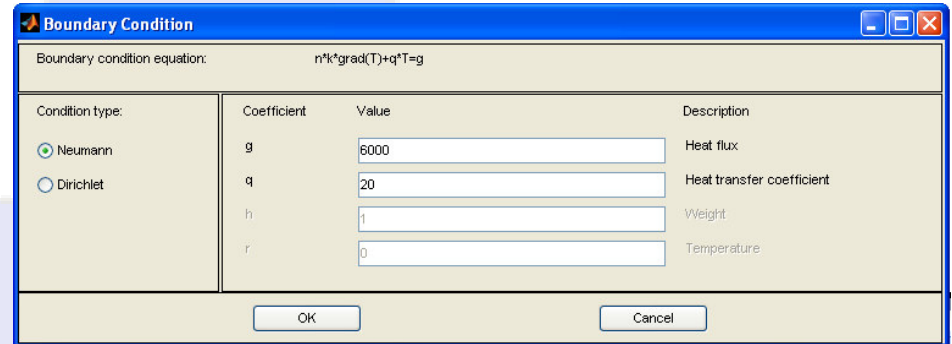


- en el menu 'Boundary' seleccionamos 'Boundary Mode'.
- Double click en cada linea para especificar



CB convectiva :

$$flux = -k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{\infty})$$

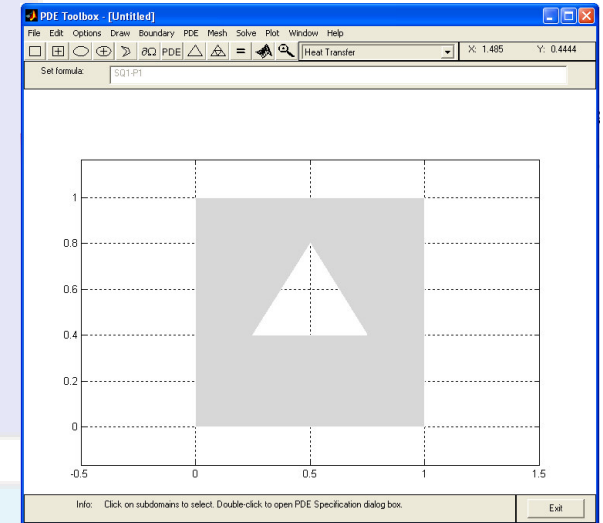


- en menu 'PDE' seleccionar 'PDE Mode'
- Double-click en el dominio

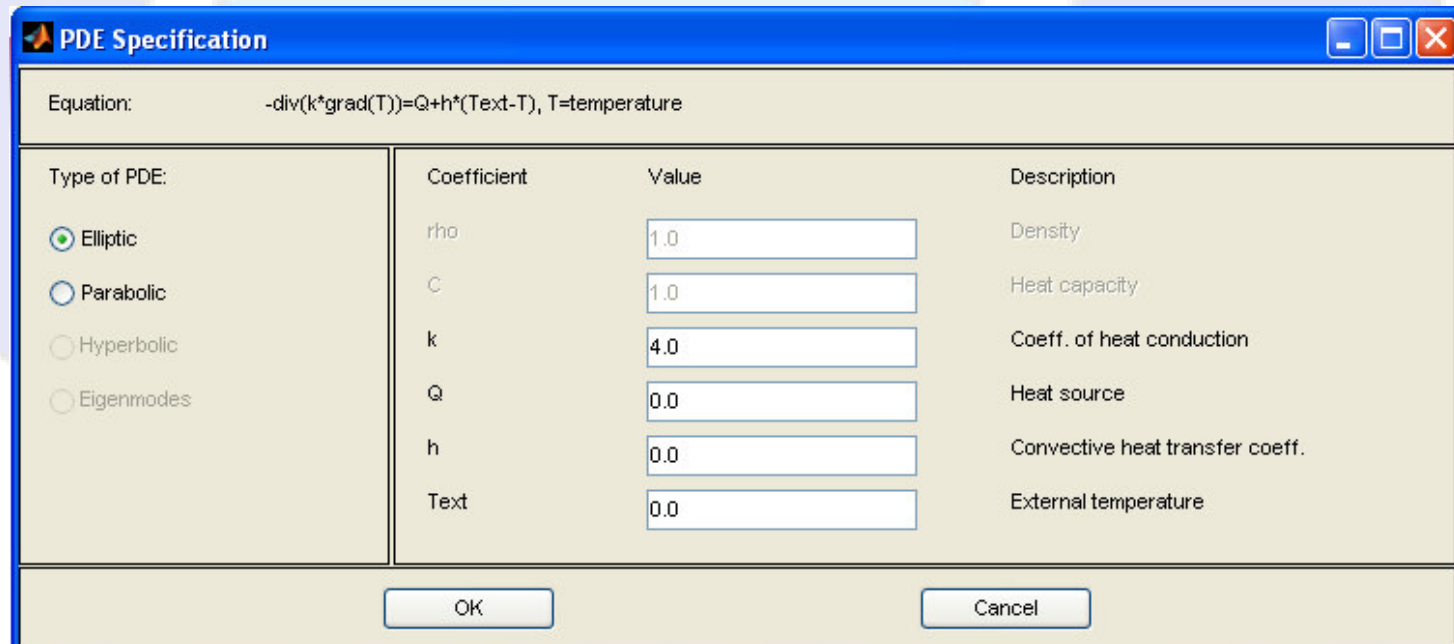
$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = Q + h(T_{ext} - T)$$

0 0

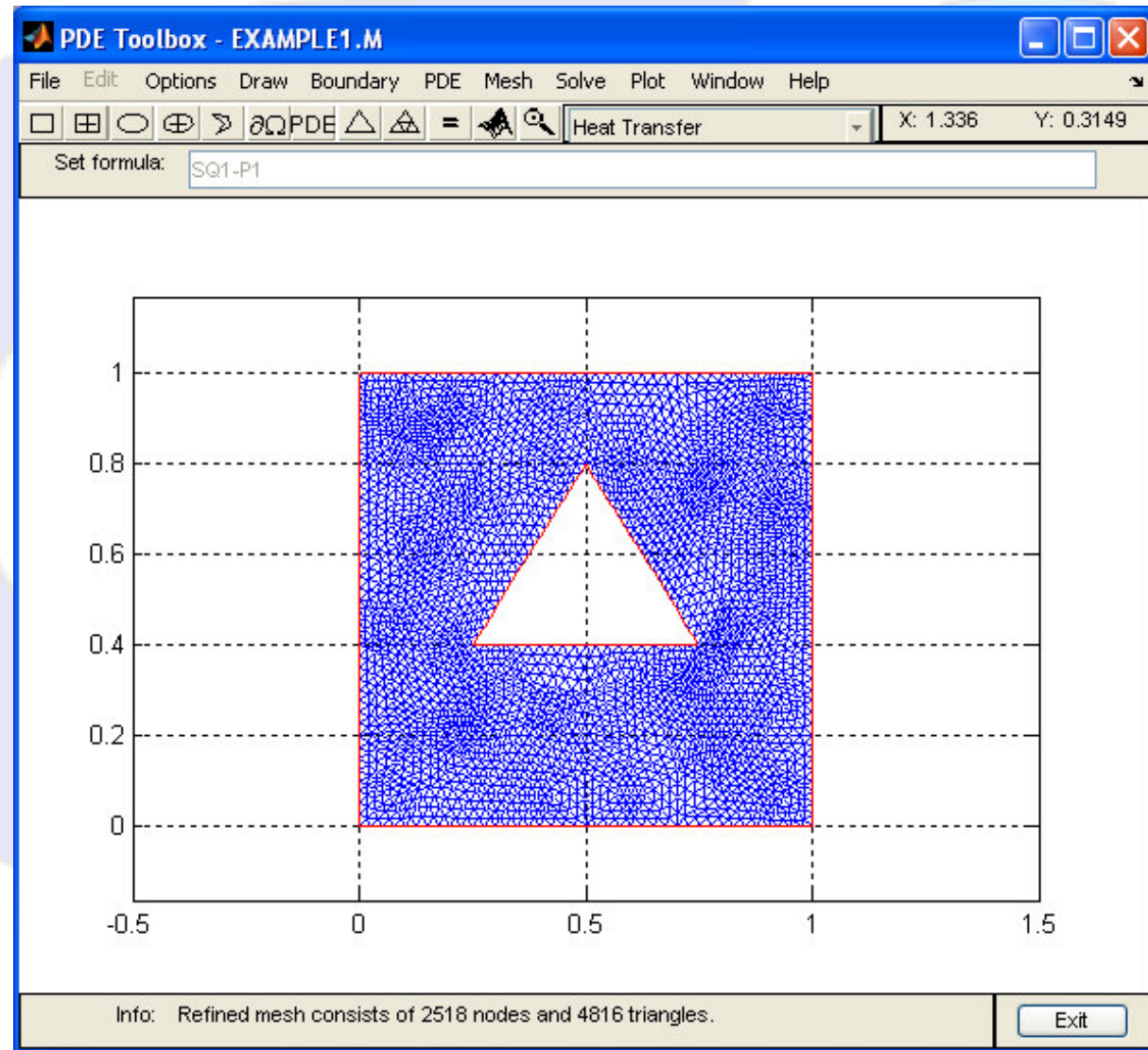
↗ ↗



Notar que esta forma de PDE el termino de conveccion y calor que aparece son relativos a todo el dominio y no a las condiciones de borde.



- En el menu 'Mesh' seleccionar 'Mesh Mode'
- En el mismo menu afinar con 'Refine Mesh'



- En el menu 'Plot' seleccionar 'Parameters'
- Especificar las opciones de visualización
- Activar 'Plot'

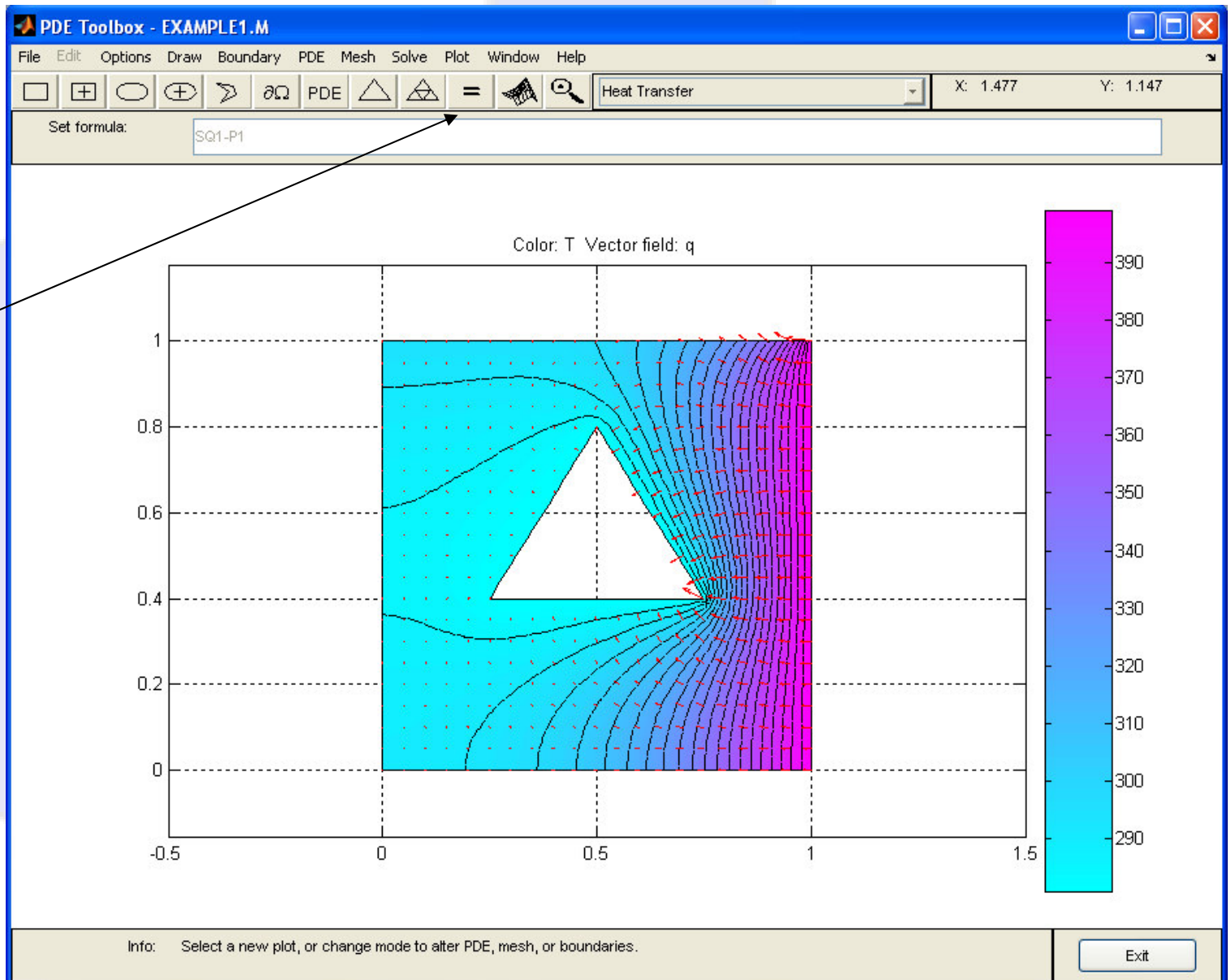
Plot Selection

Plot type:	Property:	User entry:	Plot style:
<input checked="" type="checkbox"/> Color	temperature		interpolated shad.
<input checked="" type="checkbox"/> Contour			
<input checked="" type="checkbox"/> Arrows	heat flux		proportional
<input type="checkbox"/> Deformed mesh	temperature gradient		
<input type="checkbox"/> Height (3-D plot)	temperature		continuous
<input type="checkbox"/> Animation	Options...		

Plot in x-y grid Contour plot levels: 20 Plot solution automatically

Show mesh Colormap: cool

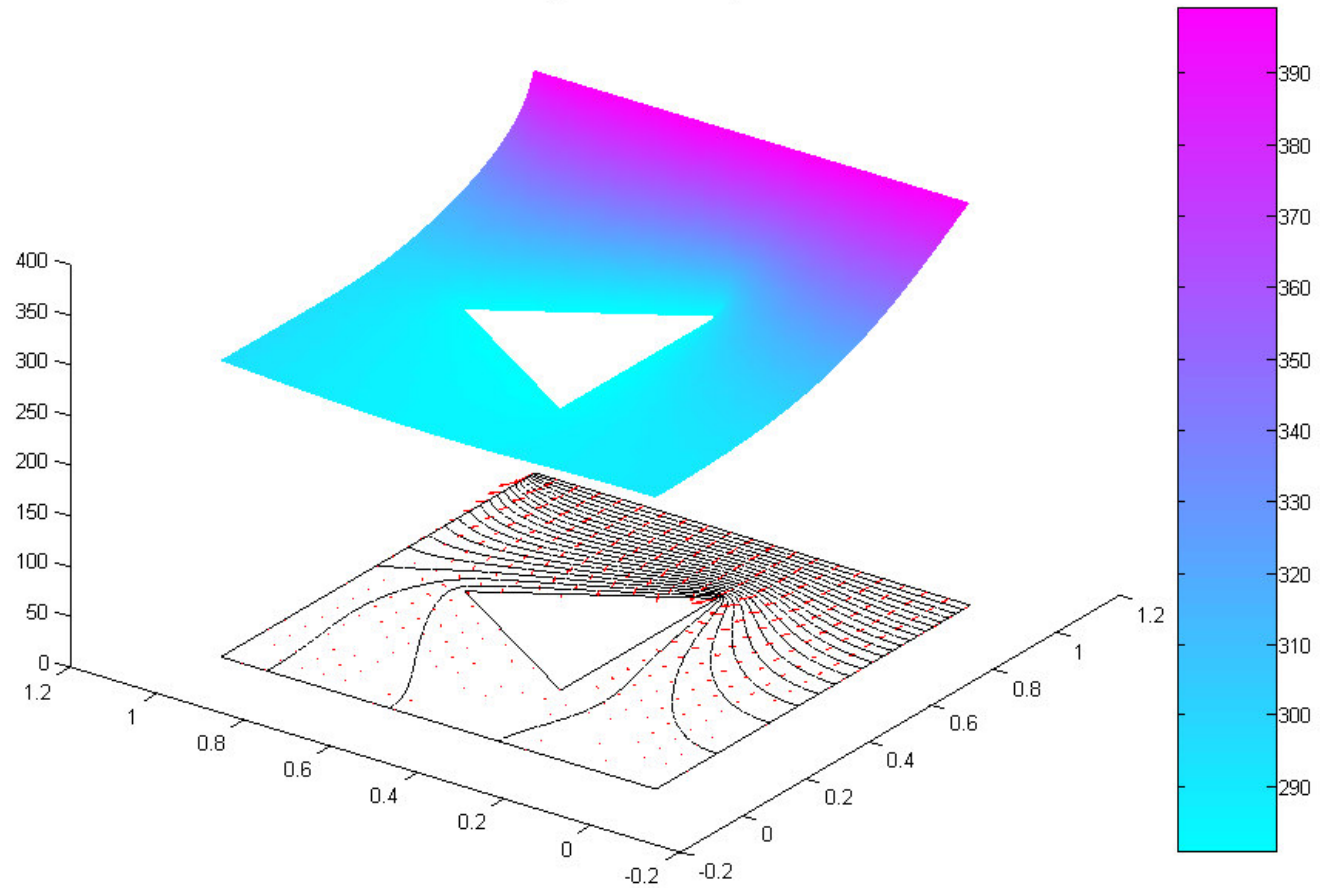
Plot Close Cancel



Solución

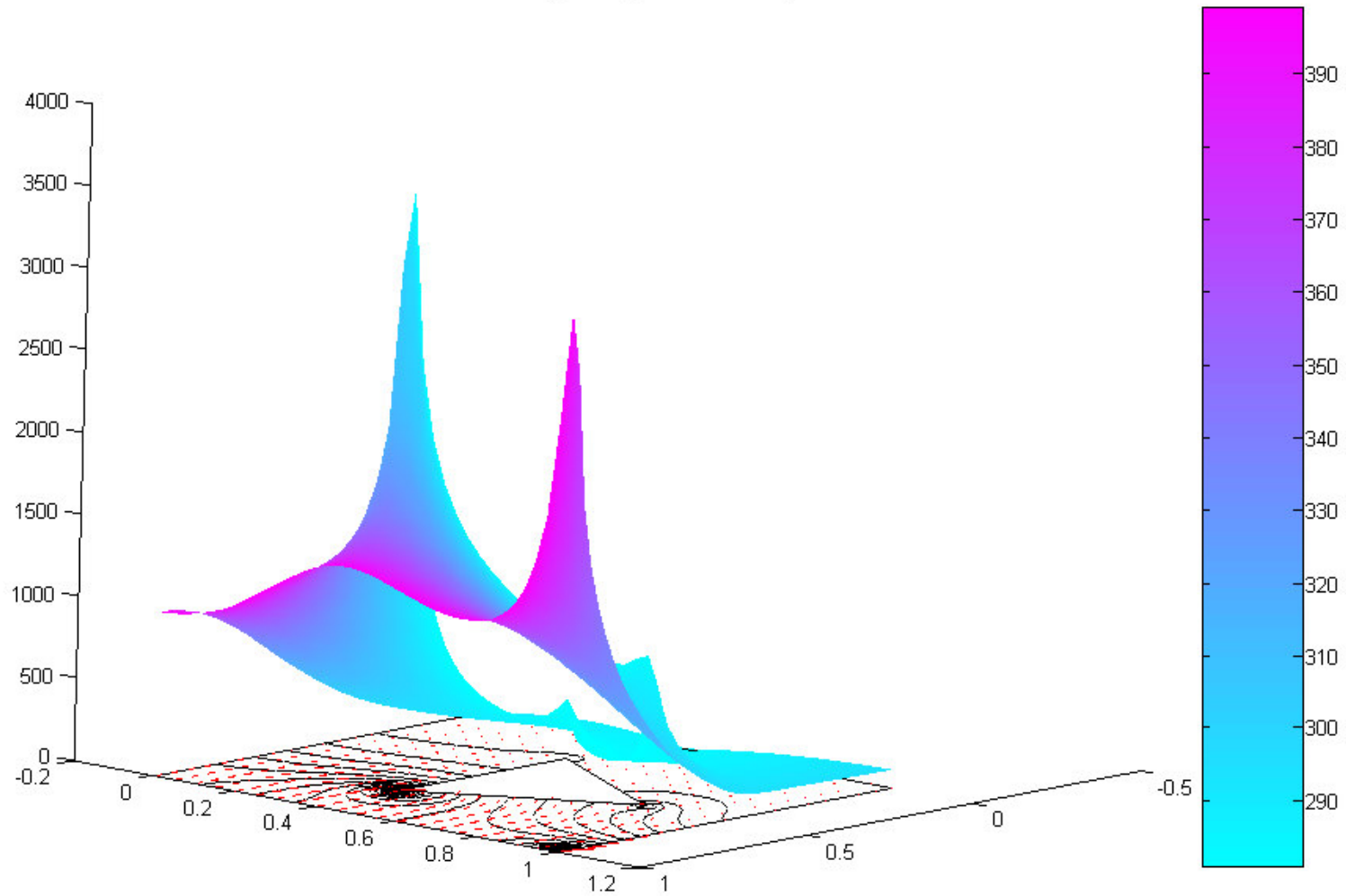
Activando 'height (3D plot)' grafica en 3D con plano de contorno

Color: T Height: T Vector field: q



3D para flujo de calor *heat flux*

Color: T Height: abs(q) Vector field: q



Transferencia de calor no estacionaria

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q + h(T_{ext} - T)$$

PDE Specification

Equation: $\rho * C * T' - \text{div}(k * \text{grad}(T)) = Q + h * (T_{ext} - T)$, T=temperature

Type of PDE:	Coefficient	Value	Description
<input type="radio"/> Elliptic	rho	8000.0	Density
<input checked="" type="radio"/> Parabolic	C	100.0	Heat capacity
<input type="radio"/> Hyperbolic	k	4	Coeff. of heat conduction
<input type="radio"/> Eigenmodes	Q	0.0	Heat source
	h	0.0	Convective heat transfer coeff.
	Text	0.0	External temperature

OK Cancel

Parámetros de Simulación :

En el menu 'Solve' seleccionar 'Parameters'

Tiempo de simulacion

$t=[0,100,200,300, \dots, 5000]$

Temperatura Inicial

Solve Parameters

Time:
0:100:5000

$u(t_0)$:
280

Relative tolerance:
0.01

Absolute tolerance:
0.001

OK Cancel

En el menú 'Plot' seleccionar 'Parameters', y luego 'Animation' para animar la solución con el tiempo

